

## Pi in het oude India

Indiase wiskundigen hebben in de loop van de geschiedenis een grote bijdrage geleverd aan de wiskunde. Ze hebben onder andere onderzocht hoe je het getal  $\pi$  kunt benaderen. In de zesde eeuw schreef de grote Indiase wiskundige Aryabhata het volgende:

Tel vier bij honderd op, vermenigvuldig vervolgens met acht en tel er dan tweeënzestigduizend bij op. Het resultaat is bij benadering de omtrek van een cirkel met diameter twintigduizend.

- 3p **19** Bereken, gebruikmakend van de formule  $omtrek\ cirkel = \pi \cdot diameter\ cirkel$ , in vier decimalen nauwkeurig welke waarde hieruit volgt voor het getal  $\pi$ .

Het is niet duidelijk hoe Aryabhata aan deze benadering gekomen is. In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van  $\pi$  te benaderen met behulp van een rij.

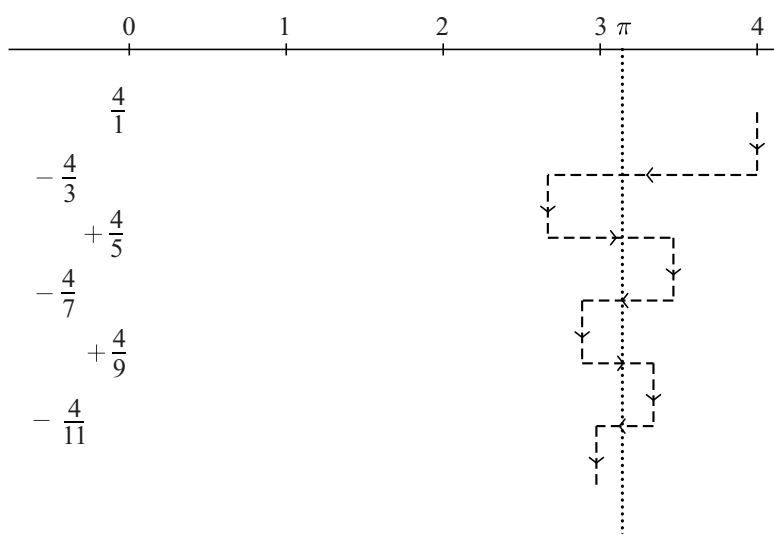
Hij begon met 4. Dat is groter dan  $\pi$ . Hij telde hier  $-\frac{4}{3}$  bij op. Het resultaat  $2\frac{2}{3}$  is nu kleiner dan  $\pi$ . Vervolgens telde hij bij het antwoord  $\frac{4}{5}$  op. Het resultaat  $3\frac{7}{15}$  is nu weer groter dan  $\pi$ .

Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichterbij het getal  $\pi$ . Zie de figuur.

**figuur**



lees verder ►►►

Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichterbij de werkelijke waarde van  $\pi$  kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van  $\pi$ . Het resultaat na drie termen:  $3\frac{7}{15}$  verschilt nog behoorlijk van  $\pi$ .

- 3p **20** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met  $\pi$  kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van  $\pi$  de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij:  $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \dots$

Hieronder staan twee mogelijke formules voor deze rij. Van deze formules is er één juist en de andere niet.

$$\text{I} \quad u_n = \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1} \text{ met } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{II} \quad u_n = \frac{(-4)^{n-1}}{2n-1} \text{ met } n = 1, 2, 3, \dots$$

- 3p **21** Onderzoek welke van deze twee formules de juiste is.

Madhava gaf ook een andere rij, die sneller tot een goede benadering van  $\pi$  leidde. De formule voor deze rij luidt:

$$v_n = \sqrt{12} \left( \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} \right) \text{ met } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Hiermee kon hij op soortgelijke wijze als boven een benadering van  $\pi$  vinden die steeds nauwkeuriger wordt naarmate meer termen gebruikt worden.

- 3p **22** Geef een benadering van  $\pi$  door de eerste drie termen van deze rij bij elkaar op te tellen en bereken het verschil met de werkelijke waarde van  $\pi$  in twee decimalen nauwkeurig.