Op een cirkel

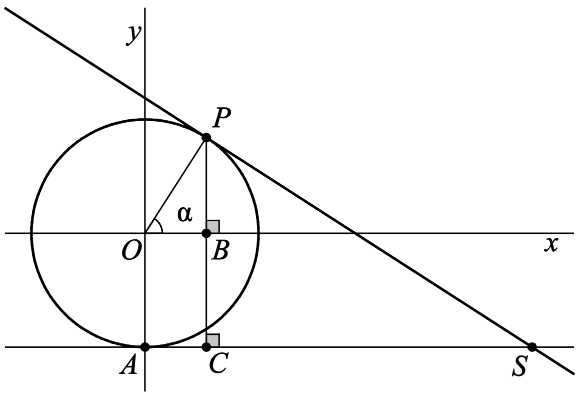
12 **maximumscore 7**

- $-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P 1
- Een vergelijking van de raaklijn in P is
  $y-\sin(\alpha)=-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\cdot(x-\cos(\alpha))$ 2
- Snijden met de raaklijn in A geeft $-1-\sin(\alpha)=-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\cdot(x-\cos(\alpha))$ 1
- $-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}x=-1-\sin(\alpha)-\dfrac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\dfrac{-\sin(\alpha)-\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}=$
  $=\dfrac{-\sin(\alpha)-1}{\sin(\alpha)}$ 2
- $x=\dfrac{-\sin(\alpha)-1}{\sin(\alpha)}\cdot-\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\dfrac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1

of

lees verder ►►►

- De loodlijn vanuit P op de x-as snijdt de x-as in B en lijn AS in C, dan zijn de driehoeken OBP en PCS gelijkvormig (want (wegens $\angle OPB + \angle CPS = 90°$; *raaklijn* en $\angle CSP + \angle CPS = 90°$; *hoekensom driehoek* geldt) $\angle OPB = \angle CSP$ en $\angle OBP = \angle PCS$; *hh*) 2
- Dus $\frac{CS}{BP} = \frac{PC}{OB}$ 1
- Dit geeft $\frac{CS}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)+1}{\cos(\alpha)}$ 1
- $CS = \frac{\sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1
- Voor de x-coördinaat van S geldt $x = \cos(\alpha) + \frac{\sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1
- $x = \frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1



of

- De driehoeken OAS en OPS zijn congruent ($OP = OA$; $\angle OAS = \angle OPS = 90°$; $OS = OS$; *ZZR*) en dus $SA = SP$ 1
- Dus voor de x-coördinaat van S geldt $x = \sqrt{(x-\cos(\alpha))^2 + (1+\sin(\alpha))^2}$ 2
- Dit geeft $x^2 = x^2 - 2x\cdot\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + 1 + 2\sin(\alpha) + \sin^2(\alpha)$ 2
- Hieruit volgt $2x\cdot\cos(\alpha) = 2 + 2\sin(\alpha)$ 1
- Dus $x = \frac{2+2\sin(\alpha)}{2\cos(\alpha)} = \frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1

lees verder ►►►

13 maximumscore 8

- (De coördinaten van Q zijn $(-\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, dus) $PQ = 2\cos(\alpha)$ — 1
- $AS = \dfrac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ dus uit $AS = PQ$ volgt $\dfrac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\cos(\alpha)$ — 1
- Dit herleiden tot $2\sin^2(\alpha) + \sin(\alpha) - 1 = 0$ — 1
- $(2\sin(\alpha)-1)(\sin(\alpha)+1) = 0$ geeft $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ of $\sin(\alpha) = -1$ — 1
- Dan volgt (omdat $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ — 1
- $AS = PQ = (2 \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) =)\ \sqrt{3}$ — 1
- $Q\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ en $A\left(0, -1\right)$ dus $AQ = \sqrt{3}$ — 1
- (AS en PQ zijn evenwijdig en even lang, dus $AQ = PS$ en dus) de omtrek van $ASPQ$ is $4\sqrt{3}$ — 1

of

- (De coördinaten van Q zijn $(-\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, dus) de richtingscoëfficiënt van AQ is $\dfrac{\sin(\alpha)+1}{-\cos(\alpha)}$ en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P is $-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ — 1
- (De lijnstukken PQ en AS zijn evenwijdig en even lang, dus lijnstuk AQ is evenwijdig aan de raaklijn aan de cirkel in P ofwel) $\dfrac{\sin(\alpha)+1}{-\cos(\alpha)} = \dfrac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ — 1
- Dit herleiden tot $2\sin^2(\alpha) + \sin(\alpha) - 1 = 0$ — 1
- $(2\sin(\alpha)-1)(\sin(\alpha)+1) = 0$ geeft $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ of $\sin(\alpha) = -1$ — 1
- Dan volgt (omdat $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ — 1
- $AS = PQ = (2 \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) =)\ \sqrt{3}$ — 1
- $Q\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ en $A\left(0, -1\right)$ dus $AQ = \sqrt{3}$ — 1
- (AS en PQ zijn evenwijdig en even lang, dus $AQ = PS$ en dus) de omtrek van $ASPQ$ is $4\sqrt{3}$ — 1

Opmerking
Als bij de beantwoording van deze vraag gebruik is gemaakt van de raaklijneigenschap (dus $PS = AS$) zonder deze expliciet te noemen, hiervoor 1 scorepunt in mindering brengen.