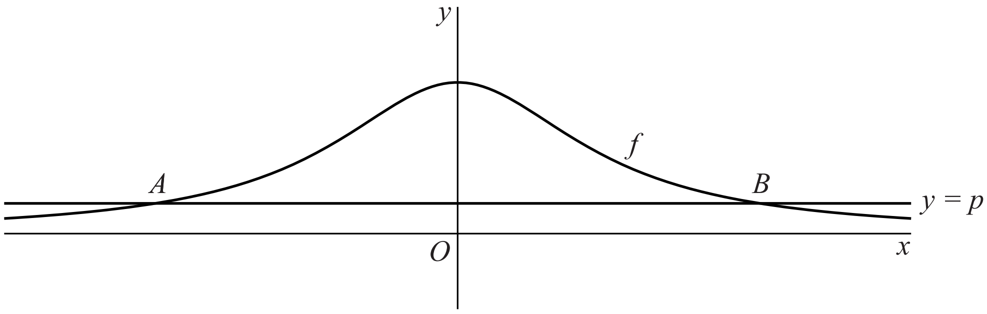
De kromme van Agnesi

De functie f is gegeven door $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

De grafiek van deze functie is onder andere bestudeerd door de Italiaanse wiskundige Maria Agnesi (1718-1799).
In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven. De top van de grafiek is $(0,1)$. Ook is voor een zekere waarde van p, met $0<p<\frac{1}{2}$, de lijn met vergelijking $y=p$ weergegeven. Deze lijn snijdt de grafiek van f in twee punten A en B.

figuur 1

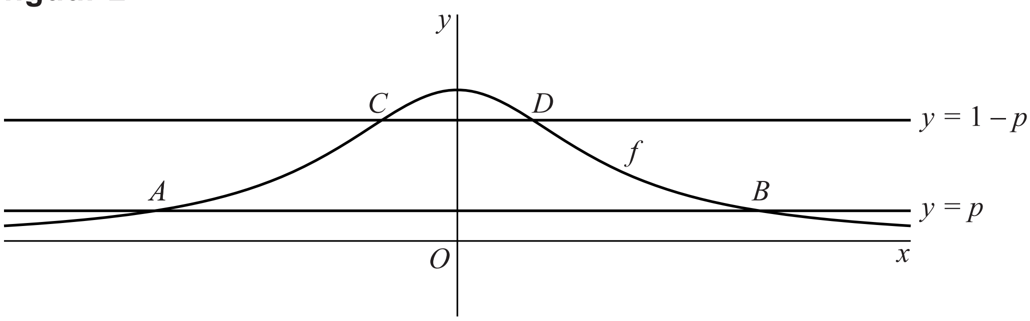


De lengte van lijnstuk AB is $2\sqrt{\frac{1}{p}-1}$.

3p **15** Bewijs dit.

In figuur 2 zijn opnieuw de grafiek van f en de lijn met vergelijking $y=p$, met $0<p<\frac{1}{2}$, weergegeven. Ook is de lijn met vergelijking $y=1-p$ weergegeven. Deze lijn snijdt de grafiek van f in twee punten C en D.

figuur 2



Er geldt: $AB\cdot CD=4$

4p **16** Bewijs dit.

De grafiek van f_a ontstaat uit de grafiek van f door twee transformaties: een vermenigvuldiging van de grafiek van f ten opzichte van de x-as met een positieve factor a en vervolgens een vermenigvuldiging van de zo verkregen grafiek ten opzichte van de y-as met dezelfde factor a.

3p **17** Stel een functievoorschrift op voor f_a. Schrijf je antwoord als één breuk.