

Tussen twee bewegende punten

Over de eenheidscirkel bewegen twee punten A en B . Beide punten bevinden zich op tijdstip $t = 0$ in het punt $(1, 0)$. Ze bewegen met constante snelheid, waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B .

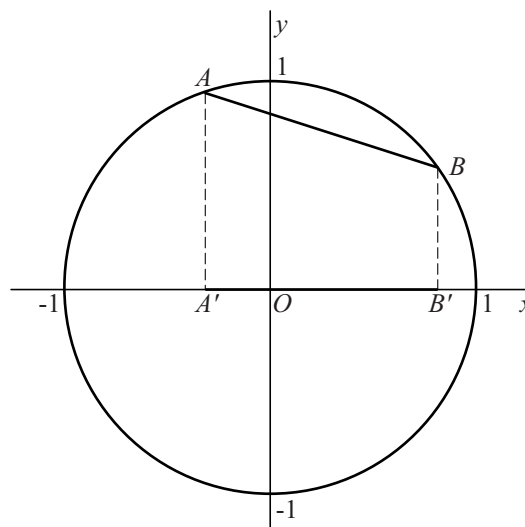
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn respectievelijk:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_B(t) = \cos t \\ y_B(t) = \sin t \end{cases}$$

Voor $t \neq k \cdot \pi$, met k geheel, vallen de punten A en B niet samen en zijn ze de eindpunten van de koorde AB .

In de figuur is de situatie getekend voor $t = \frac{1}{5}\pi$.

figuur



Lijnstuk $A'B'$ is de loodrechte projectie van koorde AB op de x -as.

De lengte van $A'B'$ verandert voortdurend tijdens de beweging.

- 4p 12 Bereken de maximale lengte van $A'B'$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Tijdens de beweging verandert ook de richtingscoëfficiënt van koorde AB . Deze richtingscoëfficiënt noemen we a . Voor elk tijdstip t , waarbij $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met k geheel, geldt:

$$(1) \quad a = -\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$$

Deze formule kan bewezen worden met behulp van de volgende goniometrische formules:

$$(2) \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \quad (\text{voor elke waarde van } p \text{ en } q)$$

$$(3) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (\text{voor elke waarde van } p \text{ en } q)$$

- 4p 13 Bewijs formule (1) met behulp van formules (2) en (3).

Lijn l is de lijn met vergelijking $y = -x$. Er zijn vier waarden van t , met $0 < t < 2\pi$, waarvoor koorde AB evenwijdig is met l .

- 5p 14 Bereken exact deze vier waarden.