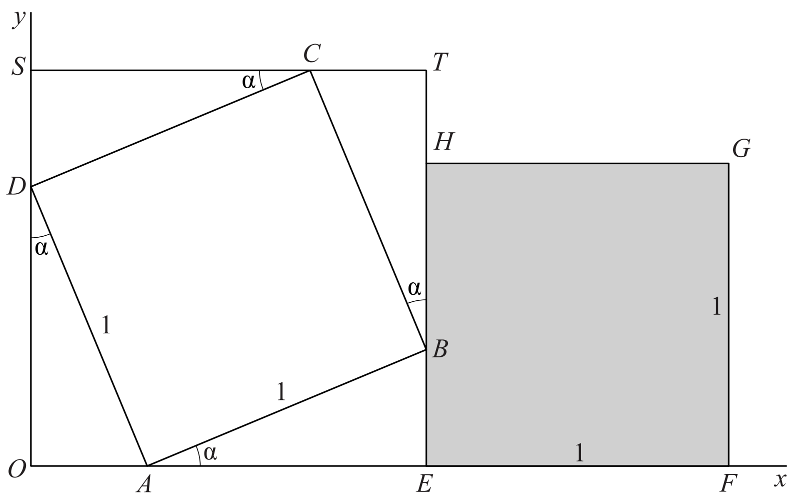
Vierkanten

In figuur 1 zie je in een assenstelsel een vierkant $ABCD$ met zijde 1.
Hoekpunt A ligt op de positieve x-as en hoekpunt D op de positieve y-as.
Vierkant $EFGH$ heeft ook zijde 1. Dit vierkant ligt naast $ABCD$ zo dat zijde EF op de x-as ligt en hoekpunt B van vierkant $ABCD$ op zijde EH ligt.
Om vierkant $ABCD$ is een derde vierkant $OETS$ getekend met horizontale en verticale zijden.
Voor de hoek α (in rad) die zijde AB met de x-as maakt, geldt: $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$
In figuur 1 is aangegeven welke hoeken gelijk zijn aan α.

figuur 1



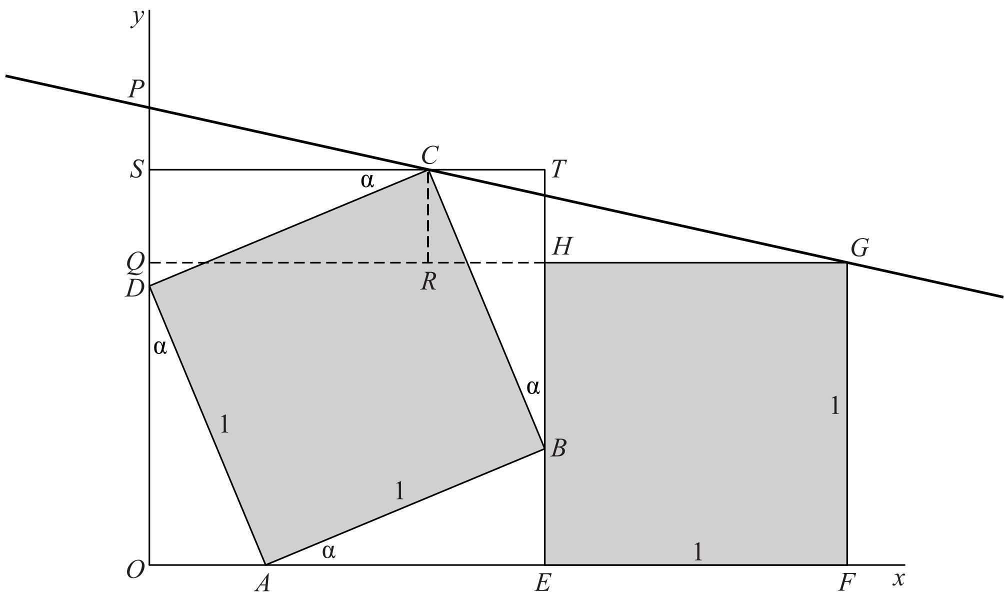
De coördinaten van C en G hangen als volgt van α af:
$C(\cos\alpha,\ \sin\alpha + \cos\alpha)$ en $G(\sin\alpha + \cos\alpha + 1,\ 1)$.

4p **5** Bereken exact de oppervlakte van vierkant $OETS$ voor $\alpha = \frac{1}{6}\pi$. Schrijf je antwoord zonder haakjes.

lees verder ►►►

De lijn door G en C snijdt de y-as in P. De loodrechte projectie van G op de y-as noemen we Q en de loodrechte projectie van C op de lijn GQ noemen we R. Zie figuur 2.

figuur 2



De driehoeken GCR en GPQ zijn gelijkvormig. Hieruit volgt:

$$PQ = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)}{\sin\alpha + 1}$$

5p **6** Toon uitgaande van de gelijkvormigheid van de driehoeken GCR en GPQ aan dat deze formule juist is.

De lengte van PQ kan ook geschreven worden als $PQ = \dfrac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha + 1}$.

4p **7** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De hoogte van punt C is maximaal als $\alpha = \frac{1}{4}\pi$. Maar de hoogte van punt P is maximaal voor een andere waarde van α tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.

6p **8** Bereken met behulp van differentiëren bij welke waarde van α de hoogte van punt P maximaal is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.