

## De bevolking van Oeganda

In 2012 publiceerde A. Wali een studie naar de bevolkingsomvang van het Afrikaanse land Oeganda. Volgens Wali kan deze omvang beschreven worden met een model van de vorm:

$$U_W = \frac{a}{1 + b \cdot g^t}$$

Hierin is  $U_W$  het aantal inwoners van Oeganda en  $t$  de tijd in jaren met  $t = 0$  in 1980.

Wali gebruikte de waarden  $a = 295\,267\,612$ ,  $b = 22,78367259$  en  $g = 0,965$ .

In de tabel kun je zien dat zijn model voor de jaren 1980-2010 waarden van  $U_W$  opleverde die verrassend goed overeenkwamen met de werkelijke waarden.

tabel

| jaar | werkelijke populatie | berekende populatie | jaar | werkelijke populatie | berekende populatie |
|------|----------------------|---------------------|------|----------------------|---------------------|
| 1980 | 12 414 719           | 12 414 719          | 1996 | 21 248 718           | 21 266 298          |
| 1981 | 12 725 252           | 12 845 405          | 1997 | 21 861 011           | 21 980 197          |
| 1982 | 13 078 930           | 13 290 330          | 1998 | 22 502 140           | 22 716 074          |
| 1983 | 13 470 393           | 13 749 915          | 1999 | 23 227 669           | 23 474 471          |
| 1984 | 13 919 514           | 14 224 592          | 2000 | 23 955 822           | 24 255 934          |
| 1985 | 14 391 743           | 14 714 799          | 2001 | 24 690 002           | 25 061 014          |
| 1986 | 14 910 724           | 15 220 984          | 2002 | 25 469 579           | 25 890 262          |
| 1987 | 15 520 093           | 15 743 605          | 2003 | 26 321 962           | 26 744 234          |
| 1988 | 16 176 418           | 16 283 127          | 2004 | 27 233 661           | 27 623 485          |
| 1989 | 16 832 384           | 16 840 024          | 2005 | 28 199 390           | 28 528 571          |
| 1990 | 17 455 758           | 17 414 779          | 2006 | 29 206 503           | 29 460 048          |
| 1991 | 18 082 137           | 18 007 881          | 2007 | 30 262 610           | 30 418 471          |
| 1992 | 18 729 453           | 18 619 830          | 2008 | 31 367 972           | 31 404 390          |
| 1993 | 19 424 376           | 19 251 129          | 2009 | 32 369 558           | 32 418 352          |
| 1994 | 20 127 590           | 19 902 293          | 2010 | 33 398 682           | 33 460 902          |
| 1995 | 20 689 516           | 20 573 841          |      |                      |                     |

Sommige mensen waren onder de indruk van de mate van overeenstemming tussen beide series getallen. "Het model wijkt nergens meer dan 2% af van de werkelijkheid", zei één van hen.

- 3p **4** Toon met een berekening aan dat deze bewering onjuist is door een jaartal te geven waarin de afwijking groter is dan 2%.

lees verder ►►►

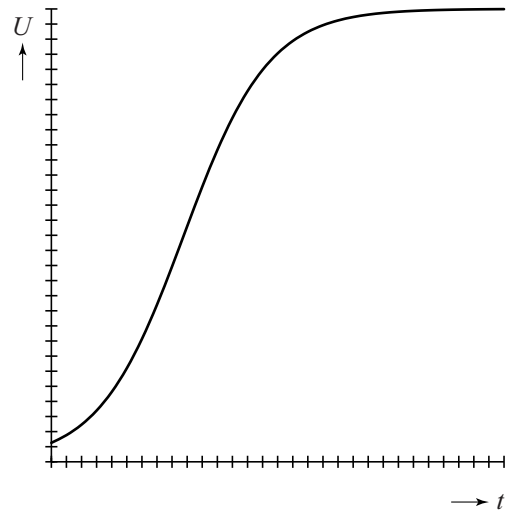
Het is niet handig als de constanten in een model heel veel cijfers voor of na de komma hebben. In het vervolg van deze opgave werken we daarom met het volgende model:

$$U = \frac{300}{1 + 22,8 \cdot 0,965^t}$$

Hierbij is  $U$  het aantal inwoners van Oeganda in miljoenen en  $t$  de tijd in jaren met  $t = 0$  in 1980.

In de figuur kun je zien dat dit model een grenswaarde voorspelt voor de bevolkingsomvang van Oeganda. De horizontale as loopt van 1980 tot 2280.

figuur



- 3p **5** Bereken, zonder getallen in de formule in te vullen, welke grenswaarde bij dit model hoort.

Voor de afgeleide van  $U$  geldt:

$$\frac{dU}{dt} \approx \frac{244 \cdot 0,965^t}{(1 + 22,8 \cdot 0,965^t)^2}$$

- 4p **6** Toon dit aan.
- 4p **7** Onderzoek met behulp van de afgeleide in welk jaar de bevolking van Oeganda volgens het model het snelst toeneemt.