Ransuilen in Vaes

In 1977 troffen onderzoekers in Vaes een kleine groep ransuilen aan. Vanaf dat moment heeft men ze nauwgezet bestudeerd. Daaruit bleek onder andere dat de ransuilen vroeg in het voorjaar broeden en dat de jongen half juni al kunnen vliegen. Uit tellingen, die steeds eind juni plaatsvonden, bleek dat de populatie in omvang toenam. In tabel 4 staan enige resultaten.

tabel 4

Aantal ransuilen per eind juni

jaar	1977	1989
aantal	20	178

Neem aan dat tussen eind juni 1977 en eind juni 1989 het aantal ransuilen jaarlijks met een vast percentage toenam.

4p **9** ☐ Bereken met hoeveel procent per jaar het aantal ransuilen in deze periode toenam.

Eind juni 1991 telde men 205 ransuilen. Dat is minder dan volgens de bovenstaande groei verwacht mocht worden. Dit zou verklaard kunnen worden door het feit dat door ransuilen gebruikte broedplaatsen (bestaande holtes in bomen en gebouwen) altijd slechts in beperkte mate aanwezig zijn. Daardoor konden sommige vrouwtjes dat jaar geen broedplaats vinden.

Aanvankelijk dacht een onderzoeker het aantal ransuilen vanaf 1989 goed te kunnen voorspellen met een model van de vorm:

$$R(t) = a - b \cdot 0{,}6^{t}$$

Hierbij is $R(t)$ het aantal ransuilen in jaar t en t het aantal jaren na eind juni 1989.

Hij koos a en b zo dat de formule 178 ransuilen opleverde voor 1989 ($t = 0$) en 205 ransuilen voor 1991 ($t = 2$). Zo vond hij voor a de waarde 220,2 en voor b de waarde 42,2.

6p **10** ☐ Bereken de waarden van a en b afgerond op *twee* decimalen.

We gebruiken verder in deze opgave de formule:

$$R(t) = 220{,}2 - 42{,}2 \cdot 0{,}6^{t}$$

Met deze formule kwam de onderzoeker voor eind juni 1993 uit op (afgerond) 215 ransuilen. Deze voorspelling kwam echter niet uit. Eind juni 1993 bleken er 223 ransuilen te zijn in plaats van de voorspelde 215. Daarom stelde de onderzoeker een nieuw model op dat overeenstemde met de aantallen ransuilen van 1989, 1991 en 1993:

$$Q(t) = \frac{250}{1 + 0{,}4045 \cdot 0{,}74^{t}}$$

Hierbij is $Q(t)$ het aantal ransuilen in jaar t en t het aantal jaren na eind juni 1989.

Hoewel dit laatste model aanvankelijk beter overeenstemt met de waarnemingen dan het eerste model, is het mogelijk dat op den duur het eerste model realistischer is. We vergelijken daarom deze twee modellen.

Zowel $R(t)$ als $Q(t)$ geven voor 1989 ($t = 0$) het aantal van 178 ransuilen.
In de jaren daarna is soms $R(t)$ groter dan $Q(t)$ en soms $Q(t)$ groter dan $R(t)$.

4p **11** ☐ Toon dit aan door de grafieken van R en Q te schetsen voor $0 \leq t \leq 5$.

lees verder ►►►

Bij het eerste model is na 1989 steeds sprake van afnemende stijging. We willen weten of dat bij het tweede model ook zo is.
Hoewel $Q(t)$ alleen voor gehele waarden van t zinvolle voorspellingen van het aantal ransuilen geeft, kunnen we $Q(t)$ toch voor niet-gehele waarden van t berekenen.
Met behulp van differentiëren is het dan mogelijk de stijging van $Q(t)$ te onderzoeken.

4p **12** ☐ Differentieer $Q(t)$.

3p **13** ☐ Onderzoek of bij $Q(t)$ in de periode tussen 1989 en 2000 steeds sprake is van afnemende stijging. Maak voor dit onderzoek in de figuur op de bijlage een grafiek van de afgeleide functie van Q.

Omdat de tellingen slechts een keer per jaar plaatsvinden, is een discreet model geschikter.
In plaats van bovenstaande formule voor $Q(t)$ had de onderzoeker voor het tweede model ook een recursieve formule kunnen maken van de volgende vorm:

$$N_{t+1} = c \cdot N_t \cdot \left(1 - \frac{N_t}{d}\right) + N_t \text{ met } N_0 = 178$$

Hierbij is t het aantal jaren na eind juni 1989.
In deze formule kunnen de constante getallen c en d zo gekozen worden dat de waarden van N_t volgens deze formule bij benadering hetzelfde zijn als de waarden van $Q(t)$.

Zowel bij de formule voor $Q(t)$ als bij de recursieve formule nadert het aantal ransuilen op den duur tot eenzelfde evenwichtswaarde.

5p **14** ☐ Bereken d met behulp van deze evenwichtswaarde.