Examen VWO

2012

tijdvak 1
dinsdag 22 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 23 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-12-1-o

Wild

Wilde zwijnen komen in Nederland onder andere op de Veluwe voor. Over het gewenste aantal wilde zwijnen op de Veluwe bestaat al geruime tijd verschil van mening. Als er veel wilde zwijnen zijn, veroorzaken zij overlast en schade aan gewassen. Als er weinig wilde zwijnen zijn, komt het voortbestaan van deze diersoort in gevaar.
Volgens de Faunabeheereenheid Veluwe is er op de Veluwe plaats en voedsel voor 835 wilde zwijnen. Dit streefgetal is door de minister van Landbouw overgenomen. Jagers krijgen daarom jaarlijks toestemming om een bepaald aantal wilde zwijnen af te schieten.

In 2008 was dit aantal af te schieten wilde zwijnen 1915.

3p **1** Bereken hoeveel procent wilde zwijnen er toen te veel waren.

Tot de niet-natuurlijke vijanden van het wilde zwijn behoren naast jagers ook auto's.
In de tabel zie je het aantal aangereden wilde zwijnen op de Veluwe in de periode 2005-2007. Dit aantal groeit bij benadering exponentieel.

tabel

jaar	2005	2006	2007
aangereden wilde zwijnen	131	275	578

Indien we veronderstellen dat de groei zich na 2007 op deze wijze blijft voortzetten, kunnen we een formule opstellen die het aantal aangereden wilde zwijnen Z uitdrukt in de tijd t met t in jaren en $t = 0$ in 2005.

5p **2** Stel deze formule op en bereken met deze formule in welk jaar er voor het eerst meer dan 1700 wilde zwijnen aangereden worden.

Dieren overleven een aanrijding meestal niet; automobilisten komen er vaak van af met alleen materiële schade. Deze materiële schade varieert van geval tot geval en is afhankelijk van een aantal factoren, waarvan het gewicht van het dier de voornaamste is.
Op grond hiervan heeft een econoom de volgende formule opgesteld:

$$S = \frac{500 + G^2}{3{,}9}$$

Hierbij is G het gewicht van het dier in kg en S de materiële schade in euro's.

Volwassen mannelijke wilde zwijnen zijn veel zwaarder dan volwassen vrouwtjes. Ga voor de volgende vraag ervan uit dat een volwassen mannelijk wild zwijn 100 kg weegt en dat een volwassen vrouwtje 70 kg weegt. Neem aan dat er twee maal zoveel mannetjes als vrouwtjes worden aangereden.

4p **3** Bereken de gemiddelde materiële schade van een aanrijding van een volwassen wild zwijn. Rond je antwoord af op tientallen euro's.

De formule $S = \frac{500 + G^2}{3{,}9}$ kan worden herschreven tot een formule van de vorm $S = a + b \cdot G^2$.

3p **4** Bereken a en b in 2 decimalen nauwkeurig.

Waardepunten

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van (waarde)punten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen. Als je niet voldoende waardepunten hebt gespaard voor een product, dan kun je een bedrag bijbetalen en zo het product toch aanschaffen.

Marjolein heeft 3600 punten gespaard. Ze wil haar theeservies uitbreiden en kan kiezen uit:

Theeglas	700 punten
Theelepeltje	450 punten
Theekop en schotel	600 punten

Ze wil al haar punten uitgeven en niets bijbetalen. Het blijkt dat er dan 4 verschillende combinaties mogelijk zijn.

4p **5** Welke verschillende combinaties van artikelen kan Marjolein met precies 3600 punten aanschaffen? Licht je antwoord toe.

Op de website van Douwe Egberts (DE) stond tot 2009 het volgende:

- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

foto

Voorbeeld
Kop en schotel van hiernaast kosten samen € 5,-.
Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,- of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,- bijbetalen.

Bij DE kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50.
Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12 000 waardepunten en wil zo min mogelijk euro's bijbetalen.

4p **6** Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Op de website staat ook een puntencalculator. Deze calculator geeft per artikel aan hoeveel euro's je punten waard zijn. Je moet dan wel minstens 100 punten hebben.
Je tikt het aantal punten in en op het scherm verschijnt de bijbehorende waarde in euro's voor één artikel. De calculator maakt gebruik van de volgende lineaire formule:

$$W = 1 + 0,005p$$

In deze formule is p het aantal punten (met $p \geq 100$) en W de waarde in euro's.

4p **7** Leid deze formule af uit bovenstaande voorwaarden.

Behendigheid

In Nederland wordt er verschil gemaakt tussen kansspelen en behendigheidsspelen. Een spel als roulette, waarbij de speler geen enkele invloed kan uitoefenen op het verloop van het spel (en dus ook niet op zijn winst-/verlieskansen) is duidelijk een kansspel. Een spel als schaken echter waarbij een speler zijn winst-/verlieskansen zelf kan beïnvloeden door oefening is natuurlijk een behendigheidsspel. Er zijn echter ook verschillende spelen waarbij niet meteen vast te stellen is om welke categorie het gaat.
Zo kun je je bij pokeren afvragen of dit een kansspel of een behendigheidsspel is. De onderzoekers Borm en Van der Genugten hebben een methode ontwikkeld om bij elk spel dit onderscheid te maken. Daartoe hebben ze enkele begrippen gedefinieerd:

- het **toevalseffect** TE
- het **leereffect** LE

Het toevalseffect is een getal dat uitdrukt in welke mate het toeval een rol speelt bij het spel: het toevalseffect is groot als het toeval een grote rol speelt. Het leereffect is een getal dat aangeeft in hoeverre een grotere ervaring helpt bij het spelen van het spel: het leereffect is groter naarmate de ervaring een grotere bijdrage levert aan de uitkomst van het spel.
Beide getallen, toevalseffect TE en leereffect LE, zijn (natuurlijk) nooit negatief. Ze zijn ook nooit beide tegelijkertijd 0.
Hoe die getallen TE en LE bepaald worden, komt verderop in deze opgave aan de orde. Eerst kijken we naar een formule die Borm en Van der Genugten gemaakt hebben met die twee begrippen. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$B = \frac{LE}{LE + TE}$$

Het getal B dat met deze formule wordt berekend, noemen de onderzoekers het **behendigheidsniveau**. Ook al weten we nu nog niet hoe TE en LE bepaald worden, toch kunnen we wel iets zeggen over de mogelijke waarde van het getal B.

1. B is nooit negatief;
2. B is ten hoogste 1;
3. Als twee spelen hetzelfde positieve leereffect hebben, is B groter bij het spel met het kleinere toevalseffect.

3p **8** Laat met behulp van de formule en de omschrijvingen van TE en LE zien dat de bovenstaande beweringen 1, 2 en 3 juist zijn.

Om het behendigheidsniveau van een spel te bepalen moet je dus een methode vaststellen om TE en LE van dat spel te berekenen. Borm en Van der Genugten hebben dat bij verschillende spelen gedaan en hebben daarna ook een grens vastgesteld waarmee ze een onderscheid konden maken tussen een kansspel en een behendigheidsspel. Die grens ligt volgens de onderzoekers bij B = 0,20. Als B groter is dan 0,20 heb je te maken met een behendigheidsspel.
Deze grens van 0,20 betekent dat in een kansspel het leereffect wel een rol mag spelen, maar niet te veel. Het leereffect moet beduidend kleiner zijn dan het toevalseffect.

4p **9** Laat zien dat bij elk spel met een behendigheidsniveau van 0,20 de verhouding tussen het leereffect en het toevalseffect gelijk is aan 1:4.

Op 3 maart 1998 concludeerde de Hoge Raad dat poker een kansspel is (en daarom alleen mag worden gespeeld in door de overheid gecontroleerde casino's).

foto

pokeren een kansspel?

De onderzoekers hebben in samenwerking met het televisieprogramma Nieuwslicht een experiment uitgevoerd om na te gaan of deze beslissing van de Hoge Raad wel terecht was. In het verslag over dit experiment schrijven zij op welke manier zij het behendigheidsniveau van het pokerspel 'Texas Hold'Em' hebben bepaald. Zij deelden de spelers in drie typen in:

- de beginner, die alleen de regels van het spel kent (zijn winst in het spel wordt alleen door geluk bepaald);
- de ervaren speler, die veel ervaring heeft met het spel (zijn winst wordt bepaald door geluk en kunde);
- de fictieve speler[1)], een ervaren speler die ook informatie heeft over toevalselementen in het spel, bijvoorbeeld welke kaarten de andere spelers hebben en welke kaarten er op tafel zullen komen te liggen (zijn winst wordt door geluk, kunde en informatie bepaald).

Met behulp hiervan definieerden Borm en Van der Genugten TE en LE:

$$TE = \text{winst van de fictieve speler} - \text{winst van de ervaren speler}$$

$$LE = \text{winst van de ervaren speler} - \text{winst van de beginner}$$

3p **10** Leg uit dat TE groter is naarmate het toeval een grotere rol speelt bij de uitkomst van het spel.

noot 1 Die fictieve speler bestond alleen in dit experiment: hij verkreeg zijn extra informatie door het gebruik van een 'oortje' waarmee hem informatie doorgegeven werd die in een normaal spel onbekend is voor een speler.

In een ander experiment, vergelijkbaar met dat van Nieuwslicht, speelden een beginner, een ervaren speler en een fictieve speler aan aparte tafels onder dezelfde omstandigheden elk drie rondes. Allen kregen bij het begin van iedere ronde evenveel geld om in te kunnen zetten. Na die drie rondes werd de stand opgemaakt van de winst per ronde. Zie de tabel.

tabel
winst per ronde in euro's

	beginner	**ervaren speler**	**fictieve speler**
ronde 1	–28	–11	10
ronde 2	30	90	161
ronde 3	–32	1	219

Om na te gaan of poker wel of niet als kansspel gezien moet worden, kun je de totale winst van ieder van de drie spelers in de tabel berekenen en daarmee het behendigheidsniveau B bepalen van het pokerspel 'Texas Hold'Em'.

3p **11** Is het pokerspel 'Texas Hold'Em' volgens de methode van Borm en Van der Genugten een kansspel als je uitgaat van de tabel? Licht je antwoord toe.

De Nationale Bibliotheek van Wit-Rusland te Minsk

Als je in Google Earth de Wit-Russische stad Minsk bekijkt, is er een opvallend gebouw zichtbaar: de Nationale Bibliotheek van Wit-Rusland.
Zie foto 1.

foto 1

In het midden van het complex staat een gebouw met een bijzondere vorm. De gevel van het gebouw bestaat geheel uit driehoeken en vierkanten. Op foto 2 en de getekende figuur 1 is dat beter zichtbaar.

foto 2

figuur 1

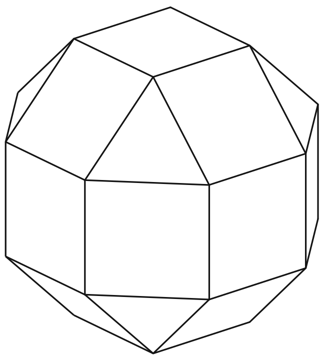


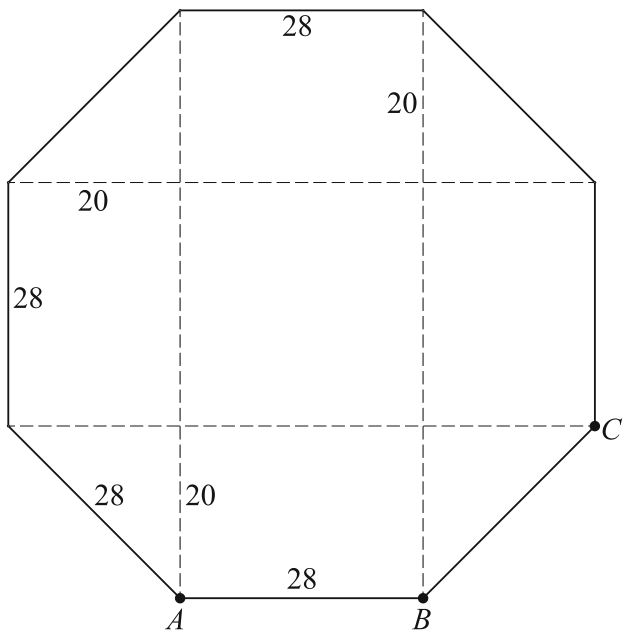
Foto 2 staat ook op de uitwerkbijlage. Om er achter te komen op welke hoogte de lens van het fototoestel zich bevond bij het nemen van deze foto kan men de horizon tekenen.

3p **12** Teken de horizon in de foto op de uitwerkbijlage.

Het gebouw heeft een regelmatige vorm. Zie de ruimtefiguur in figuur 1. De buitengevel bestaat uit een aantal vierkanten en gelijkzijdige driehoeken. De officiële naam van een dergelijke figuur luidt: **romboëdrische kuboctaëder**.

In het middelste gedeelte van het gebouw zijn 8 verdiepingen. In figuur 2 staat de plattegrond van zo'n verdieping: dit is een regelmatige achthoek. De zijden van alle vierkanten van het gebouw zijn **precies** 28 meter lang. Hiermee liggen alle afmetingen van het gebouw vast.
In figuur 2 wordt, behalve een aantal keren 28, ook nog de afmeting 20 (meter) genoemd. Deze waarde is afgerond. In de volgende vraag moet je deze afmeting nauwkeuriger berekenen.

figuur 2



5p **13** Bereken deze afmeting in 1 decimaal nauwkeurig.

3p **14** Bereken de vloeroppervlakte van zo'n verdieping.

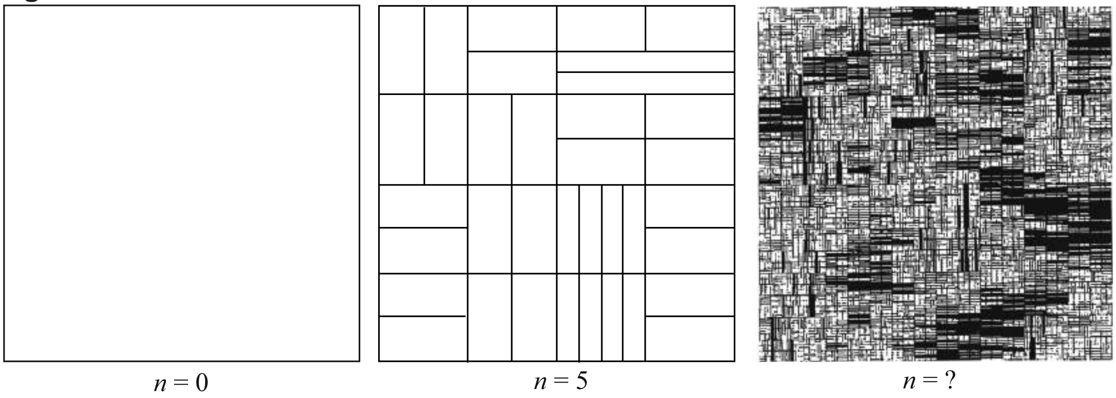
Op de uitwerkbijlage staat een vierkant in perspectief getekend. In dit vierkant kan men de achthoekige plattegrond tekenen, zó dat hij er precies in past. Op de uitwerkbijlage is hiermee een begin gemaakt: de punten A, B en C uit figuur 2 zijn al aangegeven.

5p **15** Maak de tekening van de achthoekige plattegrond op de uitwerkbijlage af.

Halvering van vlakken

In figuur 1 zie je enkele delen van de totstandkoming van een kunstwerk van Pavel Rudolf.

figuur 1



Het kunstwerk is gemaakt volgens een bepaald proces: “halvering van vlakken”. De kunstenaar is begonnen met een vierkant van 24 bij 24 cm: zie $n = 0$ in figuur 1. Dat vierkant heeft hij in twee even grote rechthoeken verdeeld. Beide rechthoeken heeft hij weer in twee even grote delen verdeeld, enzovoort. Bij elke volgende fase heeft hij elke rechthoek[1)] met een horizontale of een verticale lijn in twee gelijke delen verdeeld. De keuze voor een horizontale of verticale lijn is per rechthoek willekeurig door de kunstenaar gemaakt. Er is zo een serie plaatjes ontstaan. Elk volgend plaatje bestaat uit steeds meer rechthoeken.
Bij het tweede plaatje in figuur 1 hoort dan $n = 5$. Voor het aantal rechthoeken A_n in het n-de plaatje geldt de volgende recursieve formule:

$$A_n = 2 \cdot A_{n-1} \text{ met } A_0 = 1$$

Het derde plaatje in figuur 1 (met $n = ?$) bestaat uit 8192 rechthoeken.

3p **16** Bereken welke waarde van n bij het derde plaatje in figuur 1 hoort.

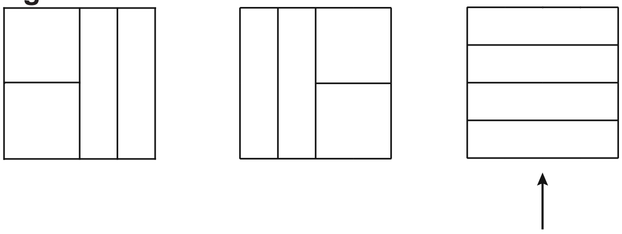
De oppervlakte per rechthoek wordt bij elke fase steeds kleiner. We gaan weer uit van een vierkant van 24 bij 24 cm met $n = 0$.

4p **17** Bereken vanaf welke waarde van n de oppervlakte per rechthoek kleiner dan 1 cm^2 is.

noot 1 Soms ontstaan er vierkanten: een vierkant is ook een rechthoek en telt dus mee bij het aantal rechthoeken.

Bij het verdelen zijn er verschillende mogelijkheden: bij elke fase kan voor elke rechthoek gekozen worden om die met een horizontale of een verticale lijn in tweeën te delen.
Ga uit van het linker plaatje in figuur 1. Hier hoort dus $n = 0$ bij. In figuur 2 zie je drie mogelijke plaatjes bij $n = 2$.

figuur 2

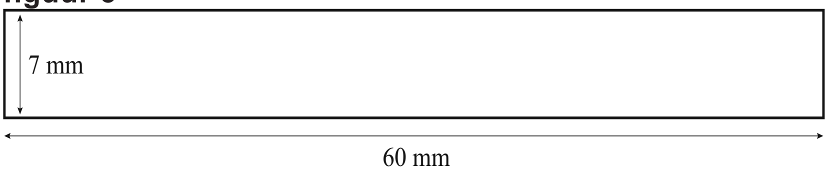


We gaan nu uit van het meest rechtse plaatje met $n = 2$ (aangeduid met een pijl).

4p **18** Onderzoek hoeveel verschillende plaatjes met $n = 4$ hiervan gemaakt kunnen worden.

In figuur 1 zie je dat sommige vlakken in het rechter plaatje helemaal zwart geworden zijn doordat de lijnen zo dicht bij elkaar lopen dat er geen wit meer overblijft. Het vlak is dan volgelopen met zwart. Om inzicht te krijgen in het proces van vollopen, onderzoeken we hoe dit verloopt bij onderstaande rechthoek. Zie figuur 3.

figuur 3



Neem aan dat in de rechthoek van figuur 3 de hoogte van het wit 7 mm is en de breedte 60 mm bedraagt. Als we deze rechthoek voor de eerste keer met een horizontale lijn van 0,5 mm dik in tweeën delen, is de totale hoogte van het overblijvende wit 6,5 mm. Bij elke volgende fase verdelen we elke rechthoek weer met een even dikke horizontale lijn in tweeën.

3p **19** Bereken na hoeveel keer verdelen er geen wit meer overblijft.

Schaatskunst

In 2010 stond in NRC Handelsblad een klein artikel dat hiernaast is afgedrukt.

ik@nrc.nl

Schaatskunst

Het schaatsseizoen is weer begonnen. Rechtuit gaat wel, bochtjes oefen ik ieder jaar alsof het voor het eerst is. Ik help een meisje met haar veters. Als we elkaar weer tegenkomen vraagt ze of ik een meisje ben of moeder. Haar vriendinnetje onderbreekt haar: "Ze is een moeder. Ze kan wel schaatsen, maar geen bochtjes, net als mijn moeder." Het is even stil. Dan zegt de ander: "Dat kan je pas zeggen wanneer je alle moeders kent en wanneer alle moeders wel kunnen schaatsen, maar geen bochtjes. En trouwens wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes". Vriendinnetje zucht: "Jij maakt ook altijd alles ingewikkeld!"

MARGREET VAN SCHIE

In deze opgave bekijken we de discussie tussen de meisjes.
Daarvoor modelleren we deze discussie:
Er zijn twee vriendinnen, vriendin 1 en vriendin 2, die de schrijfster van het artikel tegenkomen.

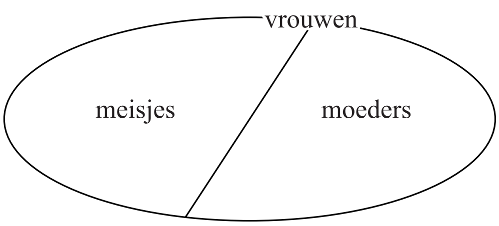
Citaat 1: vriendin 1 vraagt aan de schrijfster: "Ben jij een moeder?"

Citaat 2: vriendin 2 zegt: "Ze is een moeder omdat ze geen bochtjes kan."

Citaat 3: vriendin 1 zegt: "Dat kun je pas zeggen als je alle moeders kent en wanneer alle moeders geen bochtjes kunnen."

Citaat 4: vriendin 1 zegt bovendien: "Dat kun je niet zeggen want wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes."

Uit het artikel volgt dat er op de schaatsbaan blijkbaar maar twee verschillende soorten vrouwen zijn: moeders en meisjes.
Dat zie je hieronder in een Venndiagram weergegeven.

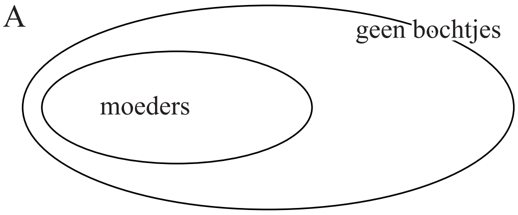


We gaan er steeds van uit dat iedere vrouw kan schaatsen.

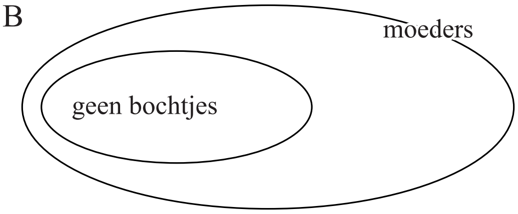
2p **20** Geef de redenering van citaat 2 in de vorm "Als … dan …"

Hieronder staan 3 verschillende Venndiagrammen. Een daarvan past bij citaat 2.

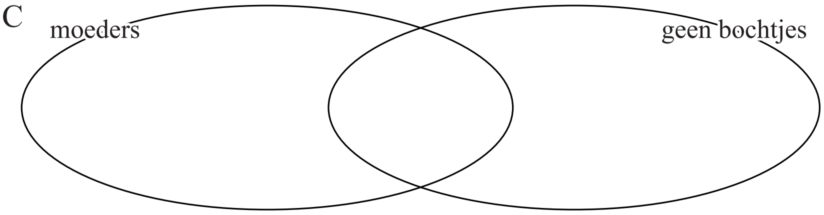
A



B



C



2p **21** Welke van de Venndiagrammen A, B of C past bij citaat 2? Licht je antwoord toe.

In citaat 4 gaat vriendin 1 tegen de uitspraak van citaat 2 in.

2p **22** Toon aan dat dit argument van citaat 4 voldoende is om de uitspraak van vriendin 2 in citaat 2 te weerleggen.

We kijken nu naar citaat 3 van vriendin 1. Stel dat de volgende bewering geldt: "Alle moeders kunnen geen bochtjes."

3p **23** Formuleer deze bewering weer in een 'Als … dan ...'-vorm en onderzoek of deze bewering de uitspraak van citaat 2 bevestigt.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.