

Examen VWO

**2013**

tijdvak 1  
woensdag 22 mei  
13.30 - 16.30 uur

**wiskunde B (pilot)**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 17 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

# Formules

---

## Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$



## De vergelijking van Antoine

Als een vloeistof een gesloten ruimte niet geheel opvult, dan verdampt een deel van de vloeistof. De damp oefent druk uit op de wanden van de gesloten ruimte: de **dampdruk**. De grootte van de dampdruk hangt af van de soort vloeistof en van de temperatuur in de gesloten ruimte. Voor het verband tussen de dampdruk en de temperatuur geldt de volgende formule:

$$\log P = k - \frac{m}{T - n} \quad (\text{met } T > n)$$

Hierin is  $P$  de dampdruk in bar en  $T$  de temperatuur in kelvin en zijn  $k$ ,  $m$  en  $n$  constanten die afhangen van de soort vloeistof.

Voor aceton, een zeer vluchtige vloeistof, geldt (bij benadering)  $k = 4,146$ ,

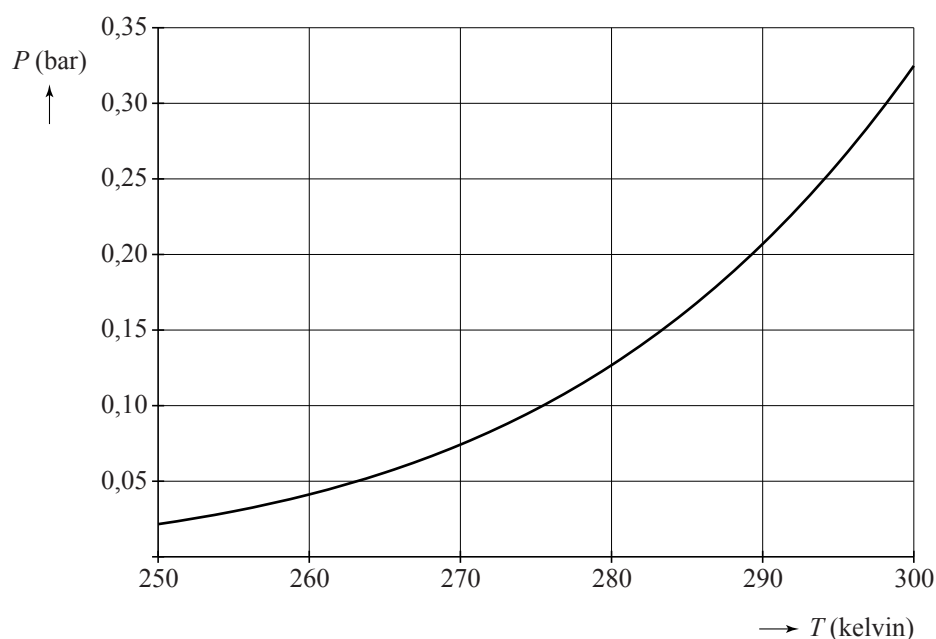
$$m = 1144 \text{ en } n = 53,15, \text{ dus } \log P = 4,146 - \frac{1144}{T - 53,15} \quad (\text{met } T > 53,15).$$

Het **kookpunt** van een vloeistof is de temperatuur waarbij de dampdruk precies 1 bar bedraagt.

- 4p 1 Bereken op algebraïsche wijze het kookpunt van aceton. Rond je antwoord af op een geheel aantal kelvin.

In de figuur hieronder is voor aceton de grafiek getekend van de dampdruk  $P$  als functie van de temperatuur  $T$  voor temperaturen tussen 250 en 300 kelvin.

**figuur**



- 3p 2 Uit de figuur krijgen we de indruk dat de functie  $P$  stijgend is.  
Beredeneer aan de hand van de formule zonder te differentiëren dat de functie inderdaad stijgend is.

Hoe de dampdruk bij een bepaalde temperatuur reageert op een verandering van die temperatuur, wordt weergegeven door de afgeleide waarde  $\frac{dP}{dT}$  (in bar/kelvin).

- 3p 3 Bereken voor aceton de waarde van  $\frac{dP}{dT}$  bij een kamertemperatuur van 293 kelvin. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Voor andere stoffen dan aceton gelden soortgelijke formules; alleen de waarden van  $k$ ,  $m$  en  $n$  zijn anders. De vorm van de formule is universeel en staat sinds 1888 bekend als de **vergelijking van Antoine**. In de tijd dat Antoine de vergelijking opstelde, gebruikte men voor de dampdruk nog de eenheid mmHg (millimeter kwik) in plaats van bar. Voor de temperatuur gebruikte men de eenheid °C (graden Celsius) in plaats van kelvin.

Voor het verband tussen de dampdruk  $p$  in mmHg en de dampdruk  $P$  in bar geldt:  $P = \frac{p}{750}$

Voor het verband tussen de temperatuur  $t$  in °C en de temperatuur  $T$  in kelvin geldt:  $T = t + 273,15$

De eerder genoemde formule voor de dampdruk van aceton kan men herschrijven tot een formule van de vorm:

$$\log p = a - \frac{1144}{t + b}$$

Hierin is  $p$  de dampdruk in mmHg, is  $t$  de temperatuur in °C en zijn  $a$  en  $b$  constanten.

- 4p 4 Bereken  $a$  en  $b$ . Rond de waarde van  $a$  af op twee decimalen en rond de waarde van  $b$  af op een geheel getal.

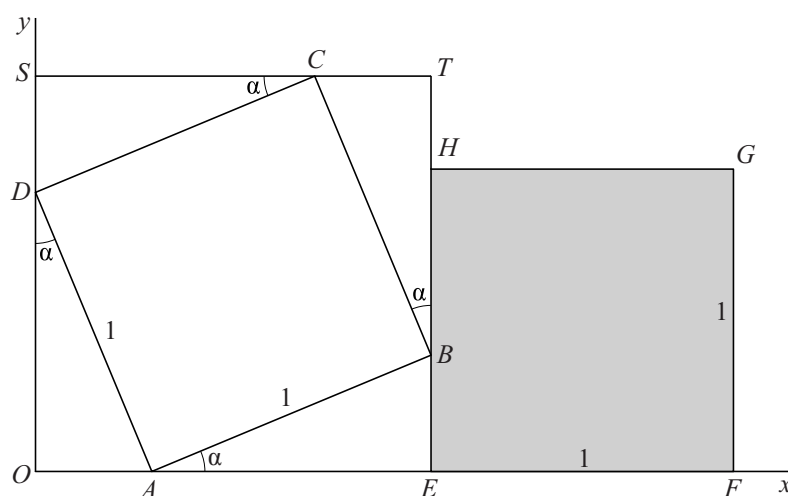
## Vierkanten

In figuur 1 zie je in een assenstelsel een vierkant  $ABCD$  met zijde 1. Hoekpunt  $A$  ligt op de positieve  $x$ -as en hoekpunt  $D$  op de positieve  $y$ -as. Vierkant  $EFGH$  heeft ook zijde 1. Dit vierkant ligt naast  $ABCD$  zo dat zijde  $EF$  op de  $x$ -as ligt en hoekpunt  $B$  van vierkant  $ABCD$  op zijde  $EH$  ligt. Om vierkant  $ABCD$  is een derde vierkant  $OETS$  getekend met horizontale en verticale zijden.

Voor de hoek  $\alpha$  (in rad) die zijde  $AB$  met de  $x$ -as maakt, geldt:  $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$

In figuur 1 is aangegeven welke hoeken gelijk zijn aan  $\alpha$ .

**figuur 1**



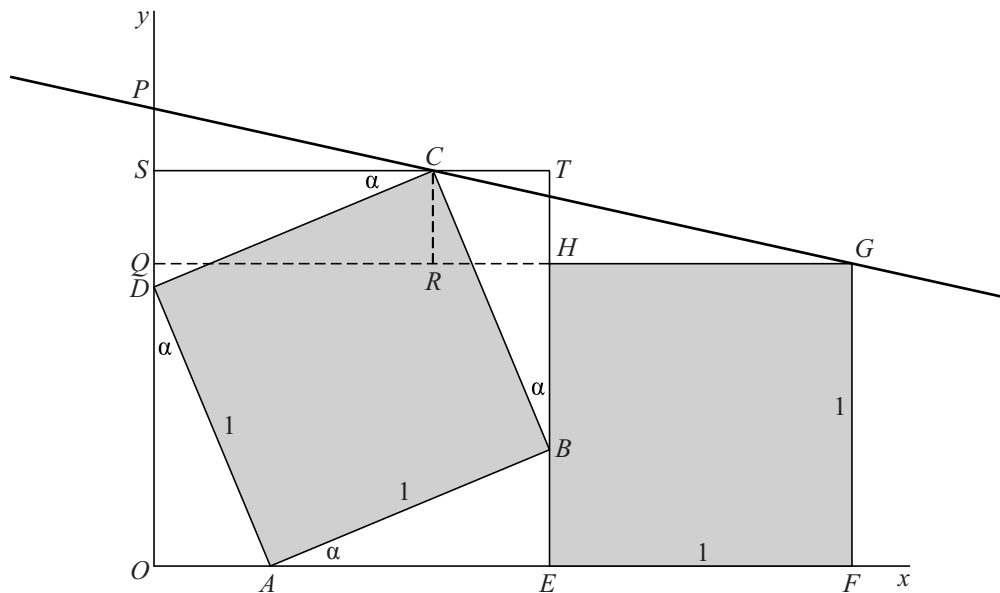
De coördinaten van  $C$  en  $G$  hangen als volgt van  $\alpha$  af:

$C(\cos \alpha, \sin \alpha + \cos \alpha)$  en  $G(\sin \alpha + \cos \alpha + 1, 1)$ .

- 4p **5** Bereken exact de oppervlakte van vierkant  $OETS$  voor  $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ . Schrijf je antwoord zonder haakjes.

De lijn door  $G$  en  $C$  snijdt de  $y$ -as in  $P$ . De loodrechte projectie van  $G$  op de  $y$ -as noemen we  $Q$  en de loodrechte projectie van  $C$  op de lijn  $GQ$  noemen we  $R$ . Zie figuur 2.

**figuur 2**



Er geldt  $OP = 1 + \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)}{\sin \alpha + 1}$ .

5p **6** Toon aan dat deze formule juist is.

De lengte van  $OP$  kan ook geschreven worden als  $OP = 1 + \frac{\sin(2\alpha)}{\sin \alpha + 1}$ .

4p **7** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De hoogte van punt  $C$  is maximaal als  $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ . Maar de hoogte van punt  $P$  is maximaal voor een andere waarde van  $\alpha$  tussen 0 en  $\frac{1}{2}\pi$ .

6p **8** Bereken met behulp van differentiëren bij welke waarde van  $\alpha$  de hoogte van punt  $P$  maximaal is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

## Halverwege

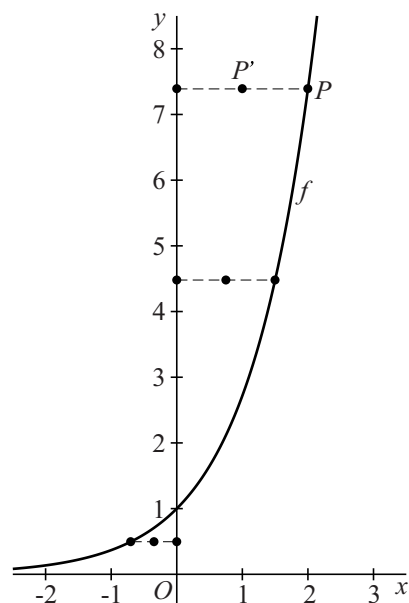
De functie  $f$  is gegeven door  $f(x) = e^x$ .

Bij elk punt  $P$  van de grafiek van  $f$  wordt het punt  $P'$  bepaald dat het midden is van  $P$  en de loodrechte projectie van  $P$  op de  $y$ -as.

Zie figuur 1.

De punten  $P'$  vormen de grafiek van een functie  $g$  die is gegeven door  $g(x) = a^x$  voor zekere waarde van  $a$ .

figuur 1

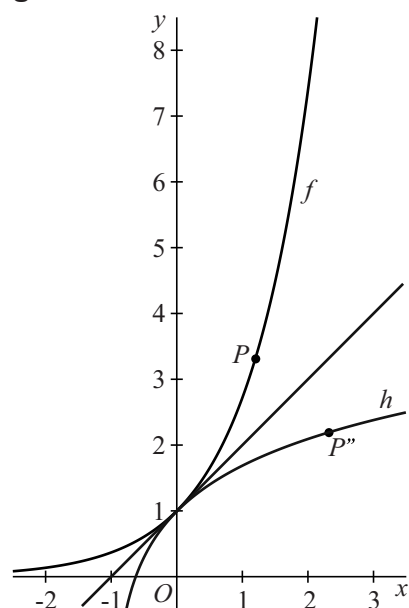


4p 9 Bereken exact deze waarde van  $a$ .

Bij elk punt  $P$  van de grafiek van  $f$  wordt het spiegelbeeld  $P''$  in de lijn met vergelijking  $y = x + 1$  bepaald. Zie figuur 2.

De punten  $P''$  vormen de grafiek van een functie  $h$ . Deze grafiek ontstaat uit die van  $f$  door een combinatie van een of meer translaties en een spiegeling in de lijn met vergelijking  $y = x$ . Zo'n spiegeling van een grafiek van een functie in de lijn met vergelijking  $y = x$  geeft de grafiek van de inverse functie.

figuur 2



5p 10 Stel een formule voor  $h$  op.



## Rakende cirkel

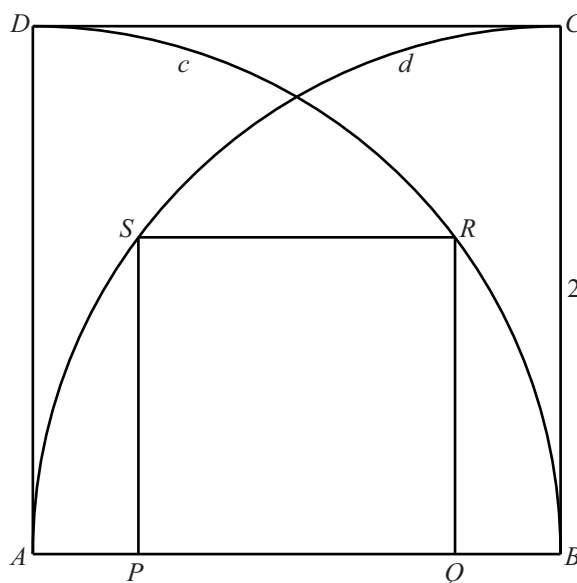
Gegeven is het vierkant  $ABCD$  met zijde 2. Zie figuur 1.

In dit vierkant zijn getekend:

- de kwartcirkel  $c$  met middelpunt  $A$  en eindpunten  $B$  en  $D$ ;
- de kwartcirkel  $d$  met middelpunt  $B$  en eindpunten  $A$  en  $C$ ;
- het vierkant  $PQRS$  met  $P$  en  $Q$  op  $AB$ ,  $R$  op  $c$  en  $S$  op  $d$ .

Er geldt:  $PQ = \frac{6}{5}$

figuur 1

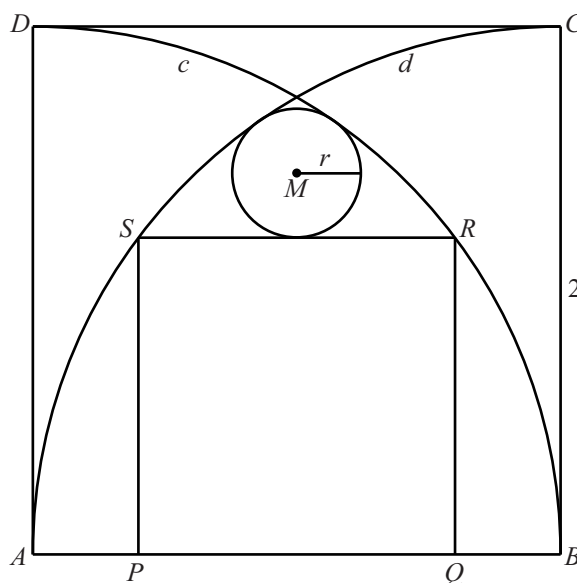


- 5p 11 Toon dit op algebraïsche wijze aan, bijvoorbeeld met behulp van driehoek  $AQR$ .

Aan de tekening in figuur 1 is een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $r$  toegevoegd, die  $RS$  en de beide kwartcirkels raakt. Zie figuur 2.

- 6p 12 Bereken exact de straal  $r$ .

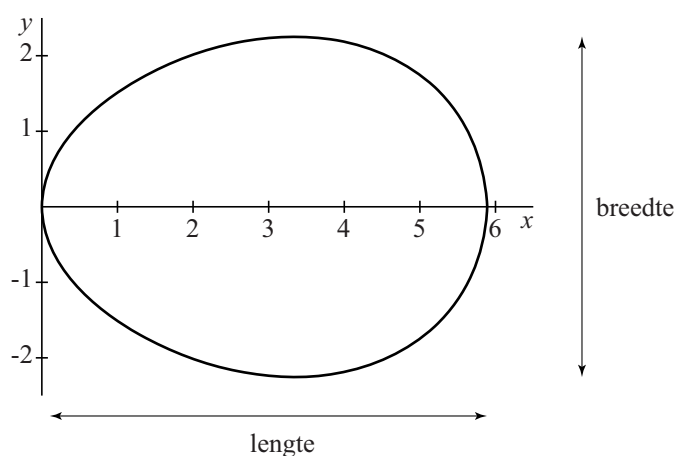
figuur 2



## Een eivorm

De functie  $f$  is gegeven door  $f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{87x - 3x^2 - 2x^3}$ . In de figuur is de grafiek van  $f$  getekend en ook het spiegelbeeld hiervan in de  $x$ -as. De twee grafieken vormen samen een figuur die lijkt op een doorsnede van een ei.

**figuur**



Op de  $x$ -as en de  $y$ -as is de eenheid 1 cm. In de figuur is aangegeven wat bedoeld wordt met de lengte en de breedte van het ei.

De lengte van het ei is ongeveer 5,9 cm.

- 4p 13 Bereken op algebraïsche wijze de lengte van het ei in cm. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- 4p 14 Bereken met behulp van primitiveren de inhoud van het ei. Geef je antwoord in een geheel aantal  $\text{cm}^3$ .

Een ander model van een ei wordt gegeven door de volgende twee parametervoorstellingen:

$$\begin{cases} x = 4 + 2\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq \pi, \text{ en } \begin{cases} x = 4 + 4\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases} \text{ met } \pi \leq t \leq 2\pi$$

Hierbij zijn  $x$  en  $y$  in cm.

Dit model voor de eivorm bestaat uit een halve cirkel gecombineerd met een halve cirkel die horizontaal is uitgerekt.

- 4p 15 Toon dit aan en bereken hiermee de lengte en de breedte van het ei.

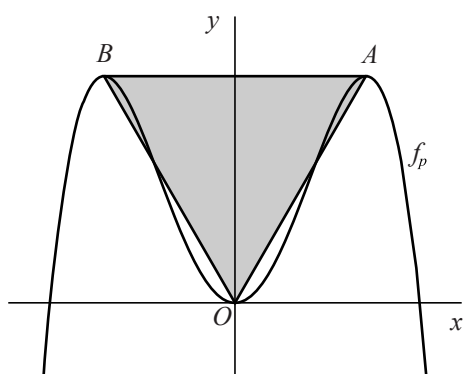
## Driehoek bij een vierdegraadsfunctie

Voor elke positieve waarde van  $p$  is de functie  $f_p$  gegeven door

$$f_p(x) = 2x^2 - px^4.$$

De grafiek van  $f_p$  heeft de  $y$ -as als symmetrieas. Verder heeft deze grafiek drie toppen: het punt  $O(0, 0)$  en de punten  $A$  en  $B$ . Zie de figuur. Deze drie punten zijn de hoekpunten van driehoek  $OAB$ , waarbij de coördinaten van de punten  $A$  en  $B$  afhankelijk zijn van de waarde van  $p$ . Driehoek  $OAB$  is in de figuur grijs gemaakt.

**figuur**



Er is één waarde van  $p$  waarbij de lengte van lijnstuk  $OA$  gelijk is aan de lengte van lijnstuk  $AB$ .

8p **16** Bereken exact deze waarde van  $p$ .

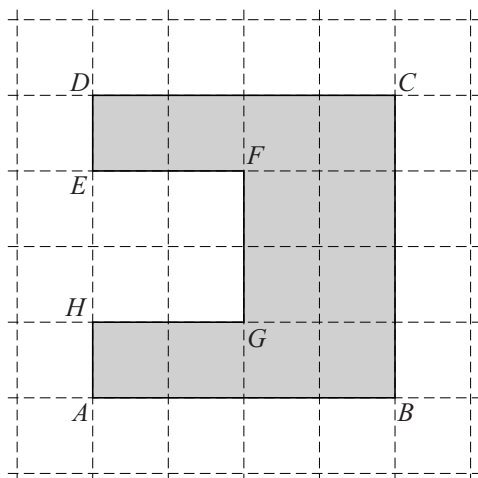
**Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.**

## Zwaartepunt

Gegeven is een veelhoek  $ABCDEFGH$ . Deze veelhoek is ontstaan door uit vierkant  $ABCD$  met zijde 4, het vierkant  $HGFE$  met zijde 2 weg te laten. Hierbij liggen  $E$  en  $H$  beide op  $AD$  met  $AH = DE$ . Zie de figuur.

Om het zwaartepunt van deze veelhoek te vinden, kan de veelhoek bijvoorbeeld worden verdeeld in drie rechthoeken die vervolgens worden opgevat als drie puntmassa's. Het zwaartepunt van de drie puntmassa's valt dan samen met het zwaartepunt van de veelhoek.

**figuur**



- 5p 17 Teken in de figuur op de uitwerkbijlage met behulp van vectoren de plaats van het zwaartepunt van de veelhoek. Licht je werkwijze toe.