

# Examen VWO 2012

tijdvak 1  
woensdag 16 mei  
13.30 - 16.30 uur

**wiskunde B**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 17 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

# Formules

---

## Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

### Hoeken, lijnen en afstanden:

*gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.*

### Meetkundige plaatsen:

*middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.*

### Driehoeken:

*hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zZR; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.*

### Vierhoeken:

*hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.*

### Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:

*koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.*

## Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t-u}{2} \cos \frac{t+u}{2}$$

$$\cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\cos t - \cos u = -2 \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2}$$

## Onafhankelijk van $a$

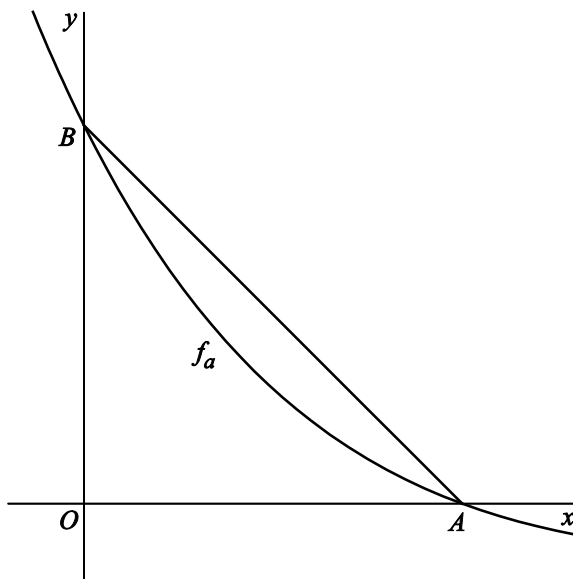
Voor elke positieve waarde van  $a$  is een functie  $f_a$  gegeven door  $f_a(x) = (1 - ax) \cdot e^{-ax}$  en een functie  $F_a$  gegeven door  $F_a(x) = x \cdot e^{-ax}$ .

De functie  $F_a$  is een primitieve functie van  $f_a$ .

3p 1 Toon dit aan.

De grafiek van  $f_a$  snijdt de  $x$ -as in punt  $A(\frac{1}{a}, 0)$  en de  $y$ -as in punt  $B(0, 1)$ .  
Zie onderstaande figuur.

**figuur**



De grafiek van  $f_a$  verdeelt driehoek  $OAB$  in twee delen.

5p 2 Toon aan dat de verhouding van de oppervlakten van deze twee delen onafhankelijk is van  $a$ .

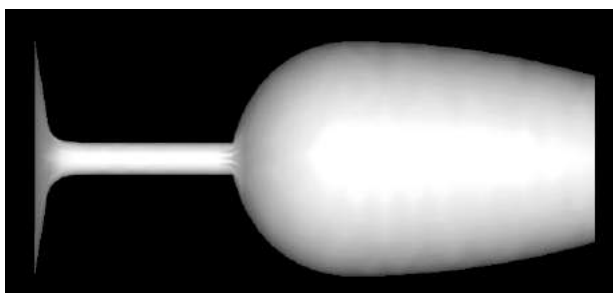
## Het standaard proefglas

Bij het proeven van wijn kan de vorm van het glas ongewenste effecten geven. Zo zal de wijn er in een breed glas donkerder uitzien dan in een smal glas. De breedte van het glas heeft ook invloed op de geur van de wijn.

Daarom is voor het proeven van wijn een standaard proefglas ontwikkeld: het ISO Standard Wine Tasting Glass.

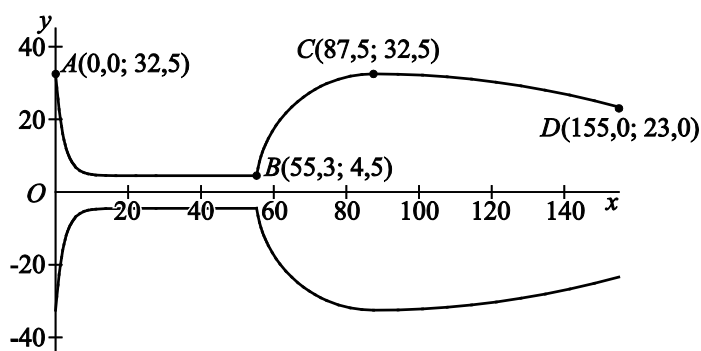
De eisen die aan dit standaard proefglas worden gesteld, zijn vastgelegd in een ISO-rapport. Aan de hand van de gegevens in dit rapport heeft een technisch tekenaar een model van het standaard proefglas getekend. Een zijaanzicht van dit model zie je in figuur 1.

figuur 1



Om dit model te maken heeft de tekenaar drie wiskundige functies gebruikt. De bijbehorende grafieken beschrijven de buitenkant van het glas. Door deze grafieken om de  $x$ -as te wentelen, ontstaat een model van het standaard proefglas. In figuur 2 zijn de drie grafieken en hun spiegelbeelden in de  $x$ -as getekend.

figuur 2

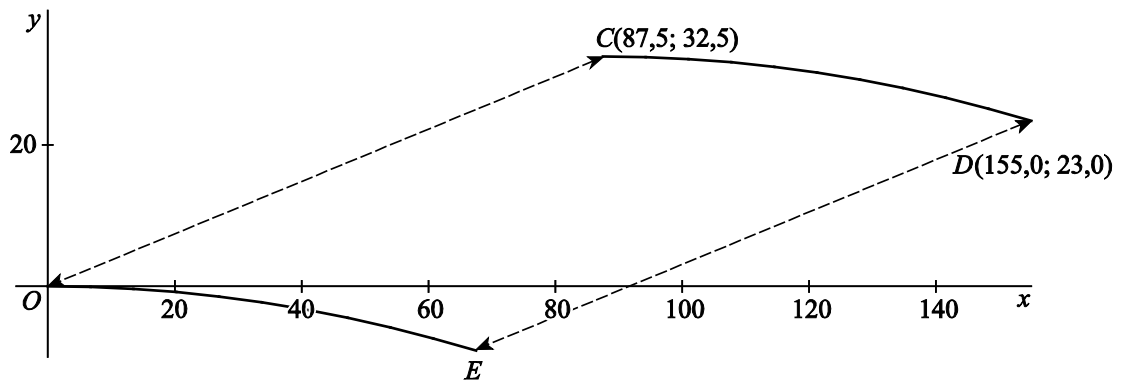


Kromme  $AB$  is de grafiek van de functie  $f$  met  $f(x) = 4,5 + 28,0 \cdot e^{-0,452x}$  op het domein  $[0,0; 55,3]$ ; hierbij zijn  $f(x)$  en  $x$  in mm. Door kromme  $AB$  te wentelen om de  $x$ -as ontstaan de buitenkant van de voet en de steel van het wijnglas. De voet en de steel zijn massief.

- 4p 3 Bereken het volume van de voet en de steel samen. Rond je antwoord af op een geheel aantal  $\text{cm}^3$ .

Om  $CD$  te tekenen wordt een bergparabool gebruikt met  $C$  als top. Een formule van deze parabool kan worden gevonden door eerst kromme  $CD$  te verschuiven zo dat  $C$  terecht komt op  $O(0, 0)$ . In figuur 3 zijn de kromme  $CD$  en de beeldkromme  $OE$  getekend en is ook de verschuiving weergegeven. Kromme  $OE$  is deel van een bergparabool met top  $O$  en heeft dus een formule van de vorm  $y = a \cdot x^2$ , met  $a < 0$ . Nu kan gebruik gemaakt worden van de translatie die kromme  $OE$  afbeeldt op kromme  $CD$ . In figuur 3 is ook deze translatie weergegeven.

**figuur 3**

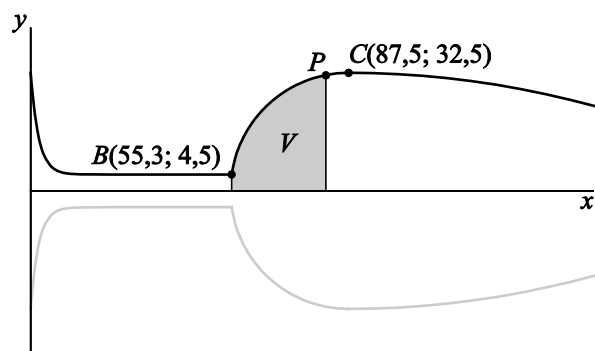


5p **4** Stel een formule op voor kromme  $CD$ .

In figuur 4 zijn opnieuw de drie grafieken en hun spiegelbeelden in de  $x$ -as getekend.

Voor het proeven van wijn wordt een glas bij voorkeur met 50 ml wijn gevuld. Daarom wil de tekenaar in figuur 4 het punt aangeven tot waar het standaard proefglas gevuld moet worden om 50 ml wijn te bevatten. Dit punt  $P$  ligt op kromme  $BC$ .

**figuur 4**



Kromme  $BC$  is de grafiek van de functie  $g$  met  $g(x) = \sqrt{-x^2 + 175x - 6600}$  op het domein  $[55,3; 87,5]$ ; hierbij zijn  $g(x)$  en  $x$  in mm.

In figuur 4 is het vlakdeel  $V$  grijs gemaakt dat wordt begrensd door de verticale lijnen door  $B$  en door  $P$ , de  $x$ -as en kromme  $BP$ .

Als  $V$  wordt gewenteld om de  $x$ -as, heeft het omwentelingslichaam dus een inhoud die overeenkomt met 50 ml. Hierbij wordt de dikte van het glas verwaarloosd.

6p **5** Bereken met behulp van primitiveren de  $x$ -coördinaat van  $P$ . Rond je antwoord af op een geheel getal.

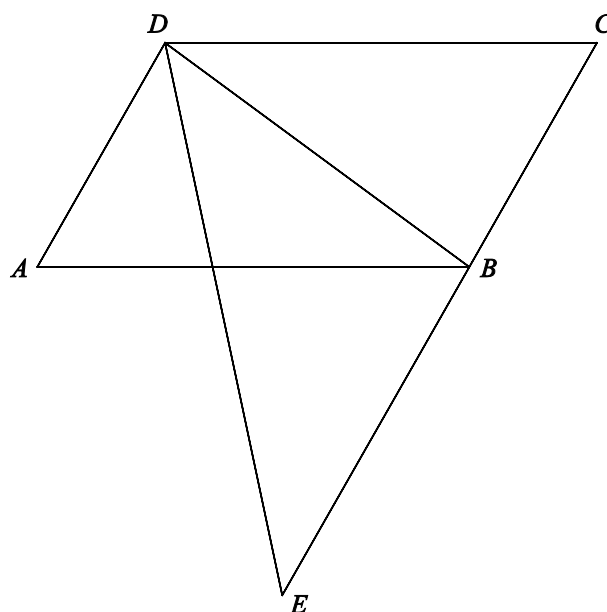
## Vanuit een parallellogram

Gegeven is een parallellogram  $ABCD$ . De bissectrice van hoek  $ADB$  snijdt het verlengde van  $CB$  in het punt  $E$ . Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

Driehoek  $BDE$  is gelijkbenig.

3p **6** Bewijs dit.

figuur 1



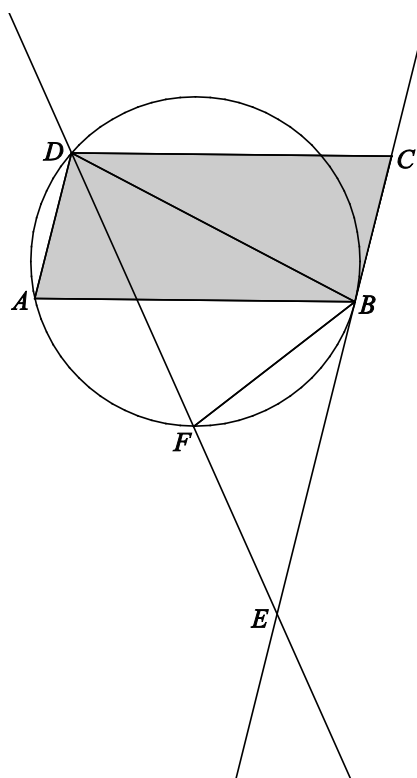
In figuur 2 is opnieuw een parallellogram  $ABCD$  getekend. Nu is ook gegeven dat de lijn door  $B$  en  $C$  raakt aan de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABD$ . De bissectrice van hoek  $ADB$  snijdt het verlengde van  $CB$  in  $E$  en de cirkel in  $F$ .

Ook hier geldt: driehoek  $BDE$  is gelijkbenig.

Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

4p **7** Bewijs dat  $\angle BFD = 2 \cdot \angle BEF$ .

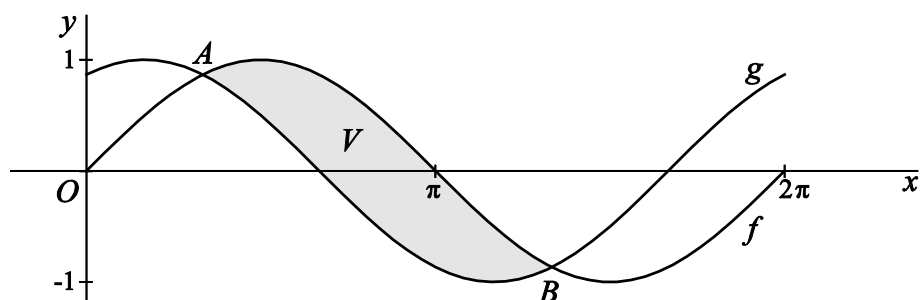
figuur 2



## Tussen twee sinusgrafieken

De functies  $f$  en  $g$  zijn gegeven door  $f(x) = \sin x$  en  $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ .  
 In figuur 1 zijn de grafieken van  $f$  en  $g$  getekend op het domein  $[0, 2\pi]$ .  
 De grafieken van  $f$  en  $g$  snijden elkaar op dit domein bij  $x = \frac{1}{3}\pi$  in het punt  $A$  en bij  $x = \frac{4}{3}\pi$  in het punt  $B$ . Zie figuur 1.

figuur 1

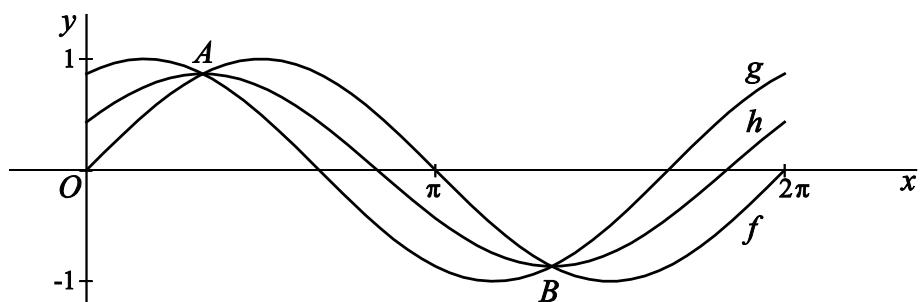


$V$  is het vlakdeel dat tussen  $A$  en  $B$  wordt ingesloten door de grafieken van  $f$  en  $g$ .

- 4p 8 Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van  $V$ .

De functie  $h$  is gegeven door  $h(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x))$ . In figuur 2 zijn de grafieken van  $f$ ,  $g$  en  $h$  getekend op het domein  $[0, 2\pi]$ .

figuur 2

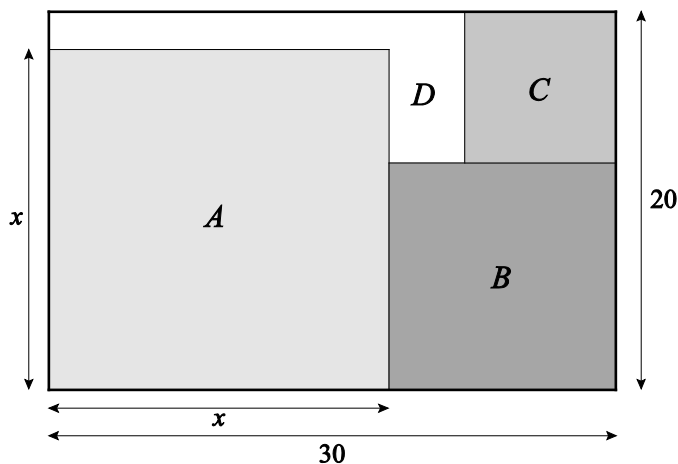


- 4p 9 Bereken exacte waarden van  $a$  en  $b$  zo dat  $\frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x))$  te herleiden is tot  $a \cdot \sin(x + b)$ .

## Drie vierkanten in een rechthoek

In een rechthoek van 20 bij 30 liggen drie vierkanten:  $A$  linksonder,  $B$  rechtsonder en  $C$  rechtsboven. Van elk vierkant valt een van de hoekpunten samen met een van de hoekpunten van de rechthoek.  $A$  en  $B$  liggen tegen elkaar aan, en  $B$  en  $C$  ook. Het deel van de rechthoek dat niet bedekt is door de vierkanten noemen we  $D$ . Zie figuur 1.

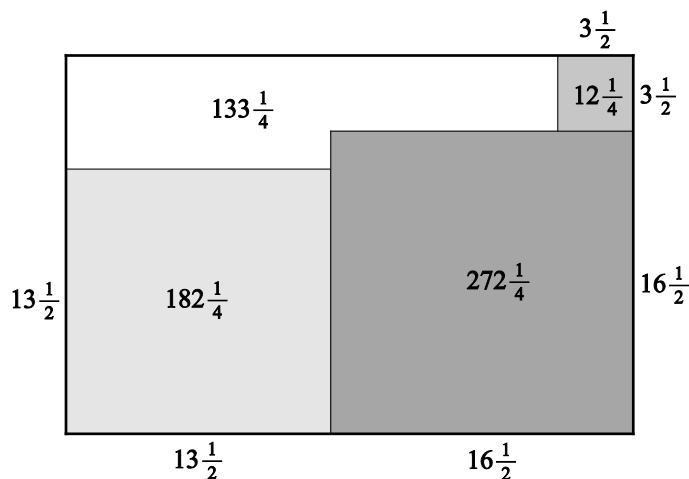
figuur 1



Als de lengte van de zijde van vierkant  $A$  gekozen is, liggen de afmetingen van de delen  $B$ ,  $C$  en  $D$  vast.

De lengte van de zijde van vierkant  $A$  noemen we  $x$ . In figuur 2 is voor  $x = 13\frac{1}{2}$  van elk deel de oppervlakte aangegeven.

figuur 2



Er is een waarde van  $x$  waarvoor de oppervlakte van  $D$  maximaal is.

8p 10 Bereken exact deze waarde van  $x$ .



## Een W

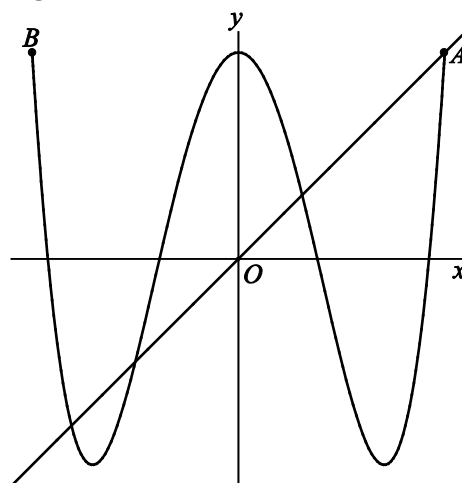
Een punt  $P$  beweegt in het  $Oxy$ -vlak volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) \\ y(t) = \cos\left(\frac{4\pi}{15} \cdot t\right) \end{cases}$$

Hierbij zijn  $x$  en  $y$  in meters,  $t$  in seconden en  $t \geq 0$ .

De baan die  $P$  doorloopt, heeft de vorm van een W. Op tijdstip  $t = 0$  start  $P$  in punt  $A(1, 1)$  en op tijdstip  $t = 15$  bevindt  $P$  zich voor het eerst in punt  $B(-1, 1)$ .

figuur



In de figuur zijn de baan die  $P$  doorloopt, de punten  $A$  en  $B$  en de lijn met vergelijking  $y = x$  getekend.

Gedurende het tijdsinterval  $[0, 15]$  bevindt  $P$  zich een aantal seconden onder de lijn met vergelijking  $y = x$ .

5p **11** Bereken dit aantal seconden.

Op zeker moment tijdens de beweging van  $A$  naar  $B$  passeert  $P$  de  $y$ -as. Daarbij neemt de  $x$ -coördinaat van  $P$  af.

5p **12** Bereken exact de snelheid van de  $x$ -coördinaat van  $P$  op dat moment.

## Verschoven platen

Op de foto's hieronder zie je een kunstwerk van de Friese kunstenaar Ids Willemsma bij het voormalige Arbeidsbureau in Heerenveen.

**foto 1**



**foto 2**



Het kunstwerk bestaat uit een aantal naast elkaar geplaatste ijzeren platen van gelijke lengte. De voorste plaat op foto 2 staat verticaal op de grond tegen een muurtje. De stand van de volgende platen is ontstaan door zo'n plaat eerst verticaal tegen het muurtje te plaatsen en daarna de onderkant over de grond te verschuiven in de richting loodrecht op het muurtje. De platen steunen steeds op de bovenkant van het muurtje.

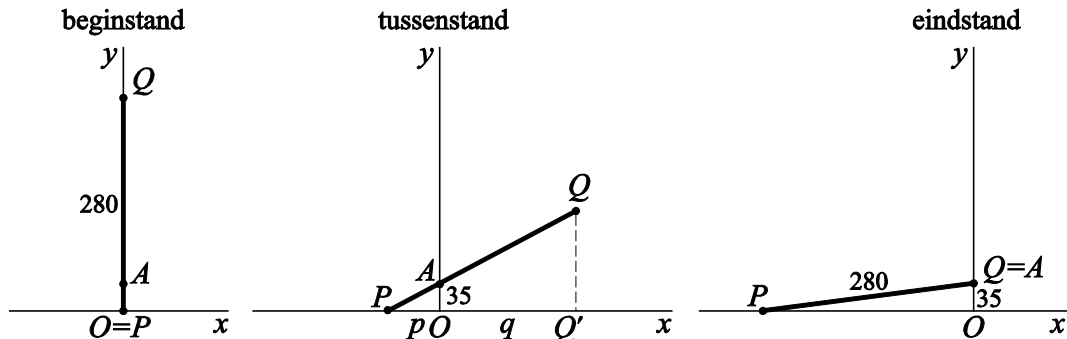
Om te voorkomen dat voorbijgangers zich stoten aan het kunstwerk, willen we weten hoe ver de bovenkant van een verschoven plaat maximaal in horizontale richting kan uitsteken.

In deze opgave kijken we naar een model met één plaat met lengte 280 cm die steeds schuiner tegen een muurtje met hoogte 35 cm komt te staan. In dit model wordt de plaat voorgesteld door een lijnstuk  $PQ$ . Zie de figuur op de volgende bladzijde.

Het punt waar  $PQ$  op de bovenrand van het muurtje steunt, noemen we  $A$ . We brengen een assenstelsel aan met de  $x$ -as horizontaal door  $P$  en de  $y$ -as verticaal door  $A$ . Langs beide assen nemen we als eenheid 1 cm. De coördinaten van  $A$  zijn dus  $(0, 35)$ .

In de verticale beginstand van  $PQ$  bevindt punt  $P$  zich in de oorsprong en is  $Q$  het punt  $(0, 280)$ . Punt  $P$  wordt over de  $x$ -as naar links geschoven, terwijl lijnstuk  $PQ$  door punt  $A$  blijft gaan. In de figuur zijn de beginstand, een tussenstand en de eindstand van lijnstuk  $PQ$  getekend.

**figuur**



De loodrechte projectie van  $Q$  op de  $x$ -as noemen we  $Q'$ .

De afstand van  $P$  tot de oorsprong noemen we  $p$  en de afstand van  $Q'$  tot de oorsprong noemen we  $q$ . Zie de figuur.

Uitgaande van de getekende tussenstand kan  $q$ , met behulp van gelijke verhoudingen in gelijkvormige driehoeken, als volgt worden uitgedrukt in  $p$ :

$$q = \frac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}} - p$$

4p **13** Toon aan dat deze formule juist is.

Als we  $q$  beschouwen als functie van  $p$ , dan geldt voor de afgeleide:

$$q'(p) = \frac{343\,000}{(p^2 + 1225) \cdot \sqrt{p^2 + 1225}} - 1$$

4p **14** Toon dit aan.

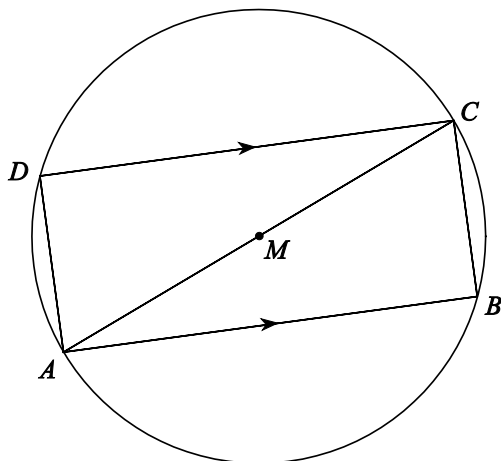
6p **15** Bereken exact het maximum van  $q$ .

**Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.**

## Evenwijdige lijnen en een rechthoek

Op een cirkel met middelpunt  $M$  liggen de punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  zo dat  $AC$  een middellijn is en de lijnstukken  $AB$  en  $CD$  evenwijdig zijn. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

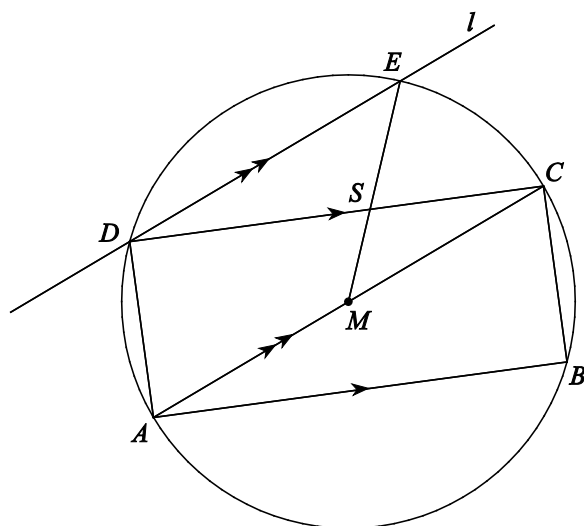
figuur 1



4p 16 Bewijs dat vierhoek  $ABCD$  een rechthoek is.

Door punt  $D$  trekken we de lijn  $l$  evenwijdig aan  $AC$ . Lijn  $l$  snijdt de cirkel behalve in  $D$  ook in punt  $E$ . Lijnstuk  $ME$  snijdt  $CD$  in punt  $S$ . Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



4p 17 Bewijs dat  $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$ .