Correctievoorschrift VWO

2012

tijdvak 2

wiskunde B (pilot)

Het correctievoorschrift bestaat uit:
1 Regels voor de beoordeling
2 Algemene regels
3 Vakspecifieke regels
4 Beoordelingsmodel
5 Inzenden scores

1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.-v.b.o.
Voorts heeft het College voor Examens (CvE) op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet CvE de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.
Voor de beoordeling zijn de volgende passages van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit van belang:

1 De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Examens.
2 De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de gecommitteerde toekomen.
3 De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Examens.

De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.

4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het aantal scorepunten voor het centraal examen vast.

5 Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke gecommitteerde aanwijzen. De beoordeling van de derde gecommitteerde komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Examens van toepassing:

1 De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.

2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.

3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:

3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;

3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel;

3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;

3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;

3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;

3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;

3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;

3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;
3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.

4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Voor een juist antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal scorepunten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.

5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

7 Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.

8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.

9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

NB Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht.
Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten.
Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht.
Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen kunnen maximaal 79 scorepunten worden behaald.

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

1. Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt één punt afgetrokken tot het maximum van het aantal punten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.

2. De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de kandidaten er verslag van hoe zij de GR gebruiken.

4 Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Een regenton

1 maximumscore 5

- $V = \pi \int_0^h (r(x))^2 \,\mathrm{d}x$ — 1
- $(r(x))^2 = \frac{1}{100}\left(5 + 15x - 15x^2\right)$ — 1
- Een primitieve van $5 + 15x - 15x^2$ is $5x + 7\frac{1}{2}x^2 - 5x^3$ — 1
- Dus $V = \dfrac{\pi}{100}\left(5h + 7\frac{1}{2}h^2 - 5h^3\right)$ — 1
- $V = \dfrac{\pi}{100} \cdot 2\frac{1}{2}\left(2h + 3h^2 - 2h^3\right) = \dfrac{\pi}{40}\left(2h + 3h^2 - 2h^3\right)$ — 1

2 maximumscore 5

- Het volume van de regenton is $\dfrac{3\pi}{40}$ ($\approx 0{,}236$) (m^3) (of nauwkeuriger) — 1
- $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3\pi}{40} = \dfrac{9\pi}{160}$ ($\approx 0{,}177$) (of nauwkeuriger) — 1
- Voor de waterhoogte h geldt: $\dfrac{\pi}{40}\left(2h + 3h^2 - 2h^3\right) = \dfrac{9\pi}{160}$
  (of $\dfrac{\pi}{40}\left(2h + 3h^2 - 2h^3\right) \approx 0{,}177$) — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm) — 1

of

- Voor $h = 1$ is $2h + 3h^2 - 2h^3$ gelijk aan 3 — 1
- Voor de waterhoogte h moet gelden: $2h + 3h^2 - 2h^3 = \frac{3}{4} \cdot 3$ — 2
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm) — 1

Een ellipsvormige baan

3 maximumscore 3

- De afstand van P tot de oorsprong op tijdstip t is
  $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2+\left(\sin\left(t+\frac{1}{3}\pi\right)\right)^2}$ 1
- Beschrijven hoe het maximum van deze afstand kan worden bepaald 1
- Het antwoord: 1,04 1

4 maximumscore 5

- De snelheid van P op tijdstip t is $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 1
- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\cos t$ 1
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos\left(t+\frac{1}{3}\pi\right)$ 1
- Voor $t=0$ geldt: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}$ 1
- De snelheid is dan $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een vergelijkbare uitdrukking) 1

5 maximumscore 6

- In A en B geldt: $\sin\left(t+\frac{1}{3}\pi\right)=\sin t$ 1
- Dus $t+\frac{1}{3}\pi=t+k\cdot 2\pi$ of $t+\frac{1}{3}\pi=\pi-t+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Hieruit volgt voor $0\le t\le 2\pi$: $t=\frac{1}{3}\pi$ of $t=1\frac{1}{3}\pi$ 2
- Dus de coördinaten van A zijn $\left(\frac{1}{4}\sqrt{3},\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en de coördinaten van B zijn
  $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{3},-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ 2

Raaklijn door perforatie

6 maximumscore 7

- $\dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2(x+2)}=\dfrac{x-2}{x^2}$ (met $x\neq -2$ en $x\neq 0$) 1
- Voor x in dit laatste -2 invullen geeft als uitkomst -1, dus de perforatie is $(-2,-1)$ 1
- Het snijpunt met de x-as is $(2,0)$ 1
- $f'(x)=\dfrac{1\cdot x^2-(x-2)\cdot 2x}{x^4}$ $\left(=\dfrac{4-x}{x^3}\right)$

  (of $f'(x)=\dfrac{2x\cdot(x^3+2x^2)-(x^2-4)\cdot(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2)^2}$) 2
- $f'(2)=\frac{1}{4}$, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(2,0)$ is $\frac{1}{4}$ 1
- Een vergelijking van de raaklijn in $(2,0)$ is dus $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$ en hieraan voldoen de coördinaten van het punt $(-2,-1)$ (of: De lijn door $(-2,-1)$ en $(2,0)$ heeft ook richtingscoëfficiënt $\frac{1}{4}$) (dus de raaklijn in $(2,0)$ gaat door de perforatie) 1

Medicijn in actieve vorm

7 maximumscore 3

- Er moet gelden $e^{-k \cdot t_{99}} = 0,01$ 2
- Dus $t_{99} = \dfrac{\ln 100}{k}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)

  (of $t_{99} = \dfrac{4,6}{k}$ (of nauwkeuriger)) 1

Opmerking
Als met $e^{-k \cdot t_{99}} = 0,99$ *is gerekend, dan voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.*

8 maximumscore 4

- $a'(t) = 25\left(-0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t}\right)$ 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $25\left(-0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t}\right) = 0$ kan worden opgelost 1
- $t_{max} \approx 4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{max} = \frac{10}{3}\ln 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)) 1

9 maximumscore 6

- Beschrijven hoe met de GR het maximum van $a(t)$ berekend kan worden 1
- Dit maximum is (ongeveer) 11,8 1
- Beschrijven hoe met de GR de t-waarden die behoren bij de snijpunten met de horizontale lijn op hoogte 5,9 gevonden kunnen worden 1
- De t-waarden zijn (ongeveer) 1,0 en 14,3 (of nauwkeuriger) 2
- Het antwoord: 13 (uur) 1

of

- Substitutie van $t_{max} = 4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{max} = \frac{10}{3}\ln 4$) in de formule voor $a(t)$ geeft $a_{max} \approx 11,8$ (of nauwkeuriger) 1
- Opgelost moet worden $25\left(e^{-0,1 \cdot t} - e^{-0,4 \cdot t}\right) = \frac{1}{2} \cdot 11,8$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $t \approx 1,0$ of $t \approx 14,3$ (of nauwkeuriger) 2
- Het antwoord: 13 (uur) 1

Drie halve cirkels

10 maximumscore 5

- $MC = 2$ en $MD = 4$ — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek MCD geeft
  $CD = (\sqrt{MD^2 - MC^2} =)\sqrt{4^2 - 2^2}$ $(= \sqrt{12})$ — 1
- Gebruik van een rechthoekige driehoek KLS, waarbij S de loodrechte projectie is van K op LQ (of een rechthoekige driehoek PQX, waarbij X het snijpunt is van LQ en de lijn door P evenwijdig aan KL) — 1
- $LS = 2$, $KS = PQ$, $KL = 4$ (of: $QX = 2$, $PX = KL = 4$) — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek KLS (of in driehoek PQX) geeft
  $KS = (\sqrt{KL^2 - LS^2} =)\sqrt{4^2 - 2^2}$, dus $PQ = \sqrt{4^2 - 2^2}$ $(= \sqrt{12})$
  (of: $PQ = (\sqrt{PX^2 - QX^2} =)\sqrt{4^2 - 2^2}$ $(= \sqrt{12})$) (dus geldt $PQ = CD$) — 1

of

- $MC = 2$ en $MD = 4$ — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek MCD geeft
  $CD = (\sqrt{MD^2 - MC^2} =)\sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ — 1
- (ΔRKP en ΔRLQ hebben twee paren gelijke hoeken, dus)
  $\Delta RKP \sim \Delta RLQ$ met R het snijpunt van AL en PQ; samen met $KP = 1$ en $LQ = 3$ geeft dit: ΔRLQ is een vergroting van ΔRKP met factor 3 — 1
- $KL = 4$, dus $RK = 2$ — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek RKP geeft
  $RP = (\sqrt{RK^2 - PK^2} =)\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ dus $PQ = 2\sqrt{3}$ (dus geldt $PQ = CD$) — 1

11 maximumscore 5

- $KM = 3$, $MT = 4 - r$, $KT = 1 + r$ — 1
- De cosinusregel in driehoek KMT geeft
  $(1+r)^2 = 3^2 + (4-r)^2 - 2 \cdot 3 \cdot (4-r) \cdot \cos\alpha$ — 1
- Herleiden tot $\cos\alpha = \dfrac{12 - 5r}{12 - 3r}$ — 3

12 maximumscore 4

- $\frac{7r-4}{4-r}=\frac{12-5r}{12-3r}$ 1
- Hieruit volgt $(7r-4)(12-3r)=(12-5r)(4-r)$ 1
- Herleiden tot $26r^2-128r+96=0$ 1
- Dit geeft, bijvoorbeeld met de abc-formule, $r=\frac{12}{13}$ (want $r=4$ voldoet niet) 1

of

- $\frac{7r-4}{4-r}=\frac{12-5r}{12-3r}$ 1
- Hieruit volgt $\frac{21r-12}{12-3r}=\frac{12-5r}{12-3r}$ 1
- Dus $21r-12=12-5r$ 1
- Dit geeft $r=\frac{12}{13}$ 1

Onafhankelijk van *p*

13 maximumscore 8

- $f(x)=0$ geeft ($x=0$ of) $x=3p$ (dus de x-coördinaat van A is $3p$) 1
- De oppervlakte van het grijze gebied is $\left[-\frac{1}{4}x^4+px^3\right]_0^{3p}$ 1
- Dit is $-\frac{1}{4}(3p)^4+p(3p)^3=-\frac{81}{4}p^4+27p^4=\frac{27}{4}p^4$ 1
- $f'(x)=-3x^2+6px$ 1
- $f'(x)=0$ geeft ($x=0$ of) $x=2p$ (dus de x-coördinaat van T is $2p$) 1
- $f(2p)=-(2p)^3+3p\cdot(2p)^2=4p^3$ (dus de y-coördinaat van T is $4p^3$) 1
- De oppervlakte van $OABC$ is dus $3p\cdot 4p^3=12p^4$ 1
- Dus de verhouding van de oppervlakten is $\frac{27}{4}p^4:12p^4=\frac{27}{4}:12$ $(=9:16)$ (en dit is onafhankelijk van p) 1

Opmerking
Als slechts voor een aantal waarden van p de verhouding is uitgerekend en dan geconcludeerd is dat de verhouding telkens gelijk is, hiervoor geen scorepunten toekennen.

Twee lijnen en een cirkel

14 maximumscore 3

- Voor de hoek α tussen *m* en *n* geldt:
$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}} \quad \left(=\frac{7}{\sqrt{50}}\right)$$ 2
- De gevraagde waarde van α is $8°$ 1

of

- De richtingscoëfficiënt van *m* is -2, dus *m* maakt een hoek van ongeveer $63{,}4°$ (of $-63{,}4°$) met de *x*-as 1
- De richtingscoëfficiënt van *n* is -3, dus *n* maakt een hoek van ongeveer $71{,}6°$ (of $-71{,}6°$) met de *x*-as 1
- De hoek tussen *m* en *n* is het verschil tussen deze twee hoeken, dus de gevraagde waarde is $8°$ 1

15 maximumscore 4

- $x = t$ en $y = 2 - 2t$ invullen in de vergelijking van *c* geeft $t^2 + (1-2t)^2 = 1$ 1
- Herleiden tot $5t^2 - 4t = 0$ 1
- Hieruit volgt ($t = 0$ of) $t = \frac{4}{5}$ 1
- $t = \frac{4}{5}$ invullen geeft $B(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ 1

of

- $\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ voor $t = \frac{4}{5}$, dus $B(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ ligt op *m* 2
- $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - 1\right)^2 = 1$, dus $B(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ ligt op *c* 2

16 **maximumscore 6**

- De middelloodlijn van AB gaat door $(\frac{9}{10}, \frac{1}{5})$ en heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ — 1
- Een vergelijking van de middelloodlijn van AB is dus $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ — 1
- Een vergelijking van de middelloodlijn van AD is $x = \frac{5}{6}$ — 1
- Het snijpunt van deze middelloodlijnen is $M(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ — 1
- Dus A, B en D liggen op een cirkel met middelpunt $M(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ en straal $MA = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{18}}$ — 1
- $MC = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{900} + \frac{1}{900}} = \sqrt{\frac{1}{18}}$, dus C ligt ook op deze cirkel (en dus liggen A, B, C en D op één cirkel) — 1

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per school in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 22 juni naar Cito.