Examen VWO
2008

tijdvak 1
woensdag 28 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B1,2

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

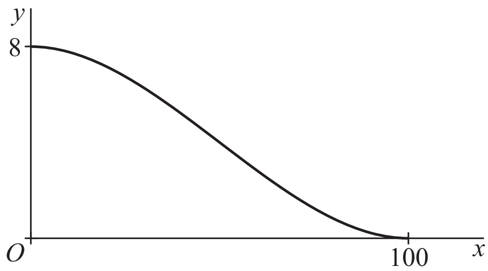
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

800025-1-019o

Landing

In deze opgave bekijken we een eenvoudig wiskundig model van de baan van een vliegtuig bij de landing.
Een vliegtuig vliegt op een hoogte van 8 km. Op een afstand van 100 km van het vliegveld (horizontaal gemeten) wordt het landingsproces ingezet.
We tekenen de baan van het vliegtuig in een assenstelsel: x is de afstand (in km, horizontaal gemeten) vanaf het punt waar het landingsproces wordt ingezet en y is de hoogte (in km).
De piloot begint het landingsproces in het punt (0, 8) en het vliegtuig komt in het punt (100, 0) op de grond. Zie figuur 1.

figuur 1



De baan die het vliegtuig tijdens het landingsproces beschrijft, wordt in het assenstelsel bij benadering gegeven door: $y = 8 - 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1,6 \cdot 10^{-5} \cdot x^3$

4p **1** Toon langs algebraïsche weg aan dat volgens bovenstaande formule het vliegtuig zowel in het punt (0, 8) als in het punt (100, 0) een horizontale bewegingsrichting heeft.

De snelheid in horizontale richting is tijdens het gehele landingsproces 500 km/u.
Er geldt dus: $x = 500t,$ waarbij t het aantal uren na het inzetten van de landing is en $0 \le t \le 0,2$.

Voor de hoogte y geldt: $y = 8 - 600 \cdot t^2 + 2000 \cdot t^3$.

3p **2** Toon dit aan.

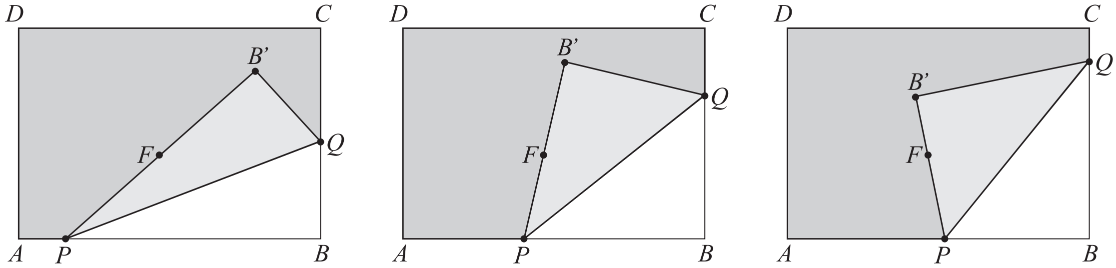
Om veiligheidsredenen mag de absolute waarde van de verticale versnelling $y''(t)$ tijdens het landingsproces niet groter zijn dan 1200 km/u^2.

4p **3** Onderzoek of aan deze eis voldaan is.

Een parabool vouwen

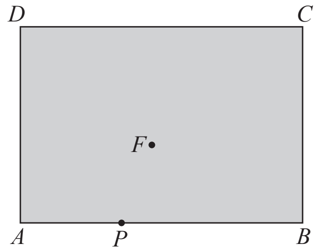
$ABCD$ is een rechthoekig vel papier met daarop een punt F. We vouwen de hoek bij B zo om dat een punt van de rand AB op F komt. Dat kan op allerlei manieren. In figuur 2 staan drie voorbeelden.

figuur 2



De vouwlijn noemen we PQ, met P op AB en Q op BC. De plaats van B na het vouwen noemen we B'.

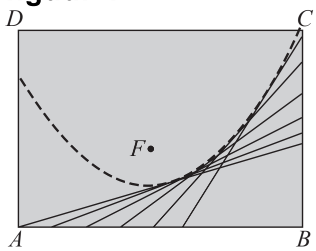
figuur 3



In figuur 3 is op de rand AB een punt P gekozen. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

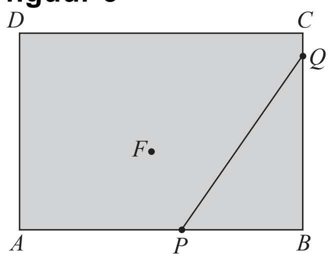
3p **4** Teken op de uitwerkbijlage zonder te vouwen het bijbehorende punt Q. Licht je werkwijze toe.

figuur 4



De vouwlijnen PQ zijn allemaal raaklijn aan één parabool. Zie figuur 4.
Deze parabool heeft brandpunt F en richtlijn AB.

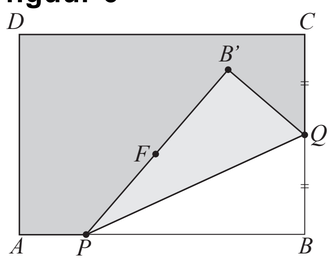
figuur 5



In figuur 5 is een van de vouwlijnen PQ getekend. Deze vouwlijn raakt de parabool in een punt R. Figuur 5 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

4p **5** Teken punt R op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

figuur 6



In figuur 6 is Q het midden van BC. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

4p **6** Bewijs dat $\angle BB'C = 90°$.

Heupoperaties

Patiënten lopen na een operatie in het ene ziekenhuis veel meer gevaar een infectie te krijgen dan in het andere. In het jaar 2003 werden in een bepaald ziekenhuis 120 heupoperaties uitgevoerd, waarna 6 patiënten een infectie kregen. De directie vond het percentage van 5% infectiegevallen te hoog en nam extra preventieve maatregelen. In 2004 werden 154 heupoperaties uitgevoerd, met nu 2 infectiegevallen. Men vroeg zich af of dit betere resultaat toeval was of door de extra preventieve maatregelen kwam.

3p **7** Bereken de kans op hoogstens 2 infectiegevallen bij 154 operaties voor het geval dat de kans op infectie per operatie 0,05 is.

Omdat de zojuist berekende kans klein is, neemt men aan dat na de extra preventieve maatregelen de kans op infectie na een operatie is afgenomen. De kans op infectie na een operatie na de extra preventieve maatregelen noemen we p.

4p **8** Bereken voor welke waarde van p geldt: de kans op hoogstens 2 infectiegevallen bij 154 patiënten is 0,05.

De afgelopen vijf jaar was de verpleegduur in Nederlandse ziekenhuizen voor heupoperaties ongeveer normaal verdeeld met een gemiddelde van 4,5 dagen en een standaardafwijking van 1,8 dagen.
Enkele chirurgen hebben de laatste tijd bij heupoperaties een infectieremmend medicijn toegediend. Een zorgverzekeraar beweert dat door behandeling met dit medicijn de gemiddelde verpleegduur korter is dan 4,5 dagen. Men neemt een aselecte steekproef van 100 patiënten die behandeld zijn met het medicijn. Van deze 100 patiënten blijkt de gemiddelde verpleegduur 4,1 dagen te zijn. De standaardafwijking van de gemiddelde verpleegduur van n patiënten is $\frac{1,8}{\sqrt{n}}$ dagen.

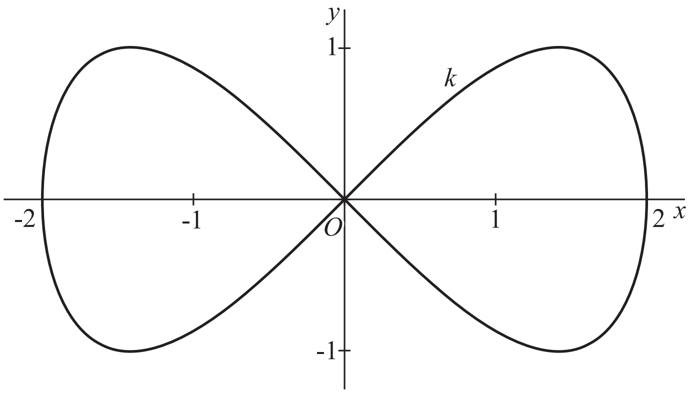
6p **9** Onderzoek of door de uitkomst 4,1 dagen de zorgverzekeraar bij een significantieniveau van 5% gelijk krijgt.

Een achtkromme

In figuur 7 is in een assenstelsel de kromme k getekend, gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi$$

figuur 7



Deze kromme is symmetrisch ten opzichte van de x-as en de y-as.

De kromme k heeft vier punten waarin de raaklijn horizontaal loopt. Deze vier punten zijn de hoekpunten van een rechthoek.

5p **10** Bereken in één decimaal nauwkeurig de oppervlakte van deze rechthoek.

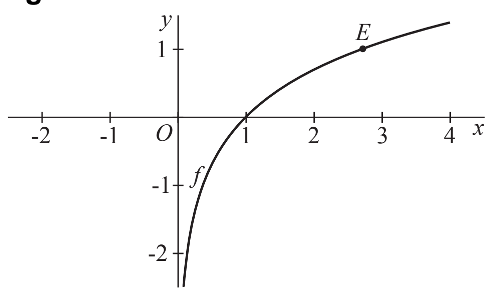
Voor $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ geldt dat de coördinaten van de punten van k voldoen aan de vergelijking $y = x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}$.

4p **11** Toon dit aan.

Vier vragen over $f(x) = \ln x$

De functie f is gegeven door $f(x) = \ln x$.
Het punt $E(\mathrm{e},\ 1)$ ligt op de grafiek van f. Zie figuur 8.

figuur 8



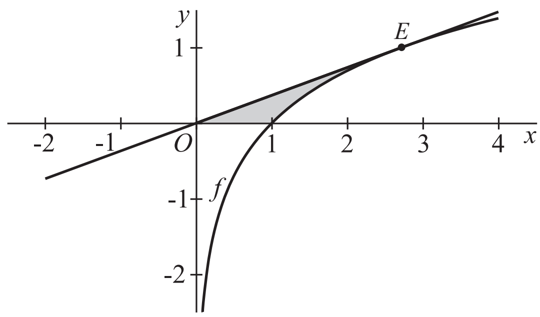
De raaklijn in E aan de grafiek van f gaat door O.

3p **12** Toon dit aan.

Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, het lijnstuk OE en de x-as is in figuur 9 grijs aangegeven. Dit gebied wordt gewenteld om de x-as.

4p **13** Bereken de inhoud van het zo verkregen omwentelingslichaam. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

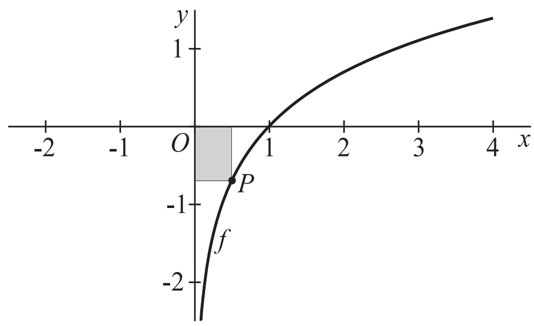
figuur 9



Voor elke waarde van x met $0 < x < 1$ ligt het punt $P(x,\ \ln x)$ op de grafiek van f.
We bekijken rechthoeken waarvan twee zijden op de assen liggen en waarvan P een hoekpunt is. Zie figuur 10.
Er is een waarde van x waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.

6p **14** Bereken langs algebraïsche weg de exacte waarde van die maximale oppervlakte.

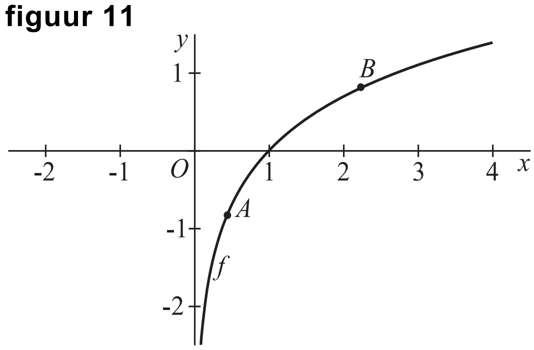
figuur 10



In figuur 11 zijn op de grafiek van f twee punten A en B getekend met de volgende eigenschappen:
De y-coördinaten van A en B zijn elkaars tegengestelde.
De x-coördinaat van B is 5 keer zo groot als de x-coördinaat van A.

6p **15** Bereken de exacte waarde van de x-coördinaat van A.

figuur 11



De quotiëntrij van de rij van Fibonacci

We beschouwen de rij van Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ….
Deze rij wordt beschreven door de formules

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ voor } n \geq 2 \end{cases}$$

We maken bij de rij van Fibonacci een quotiëntrij door elke term (behalve de eerste) door zijn voorganger te delen:

$$q_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \text{ voor } n \geq 1$$

3p **16** Toon aan dat voor $n \geq 2$ geldt: $q_n = 1 + \dfrac{1}{q_{n-1}}$

De quotiëntrij wordt dus beschreven door de formules

$$\begin{cases} q_1 = 1 \\ q_n = 1 + \dfrac{1}{q_{n-1}} \text{ voor } n \geq 2 \end{cases}$$

In de figuur op de uitwerkbijlage zijn de grafieken getekend van $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ en $y = x$.
Verder is op de x-as de plaats van q_1 aangegeven.

3p **17** Geef in deze figuur, met behulp van een webgrafiek, op de x-as de plaats van de termen q_2, q_3 en q_4 van de quotiëntrij aan.

De quotiëntrij heeft een limiet.

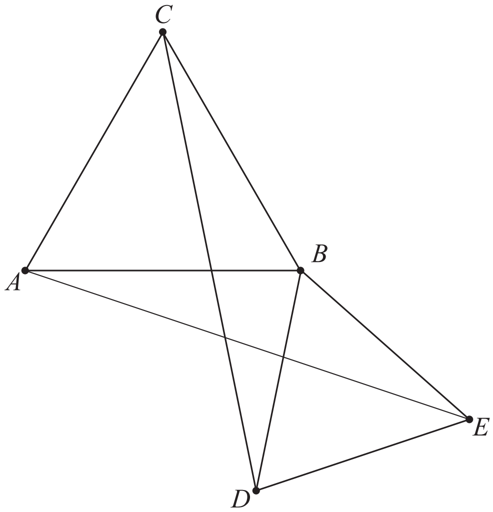
4p **18** Bereken deze limiet exact.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Twee gelijkzijdige driehoeken

In figuur 12 zijn twee gelijkzijdige driehoeken ABC en BDE getekend met gemeenschappelijk punt B. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

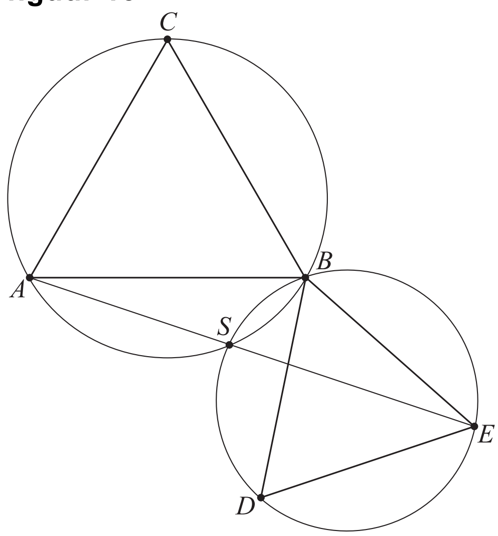
figuur 12



4p **19** Bewijs dat $AE = CD$.

In figuur 13 zijn van de twee gelijkzijdige driehoeken ABC en BDE ook de omgeschreven cirkels getekend. Deze omgeschreven cirkels hebben de punten B en S gemeenschappelijk. Ook zijn de lijnstukken AS en SE getekend. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 13



5p **20** Bewijs dat hoek ASE een gestrekte hoek is.