Wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 03

Tijdvak 2
Woensdag 18 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen; het examen bestaat uit 17 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 4, 5, 6, 11, 15, 16 en 17 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Loterij

Ter gelegenheid van een jubileum organiseert een grote universiteit een loterij. Elke student krijgt één lot. Er vinden twee trekkingen plaats. Bij de eerste trekking wordt bepaald op welke nummers een hoofdprijs van € 500,- valt. Deze nummers worden teruggedaan en uit het totaal worden vervolgens de nummers getrokken waarop een troostprijs van € 100,- valt. Op 5% van de loten valt een prijs van € 500,- en op 20% van de loten een prijs van € 100,-. Op één lot kunnen dus zowel een hoofd- als een troostprijs vallen.

Thomas is één van de studenten die zo'n lot gekregen heeft.

4p **1** ☐ Toon aan dat de kans dat Thomas minstens één prijs wint, gelijk is aan 0,24.

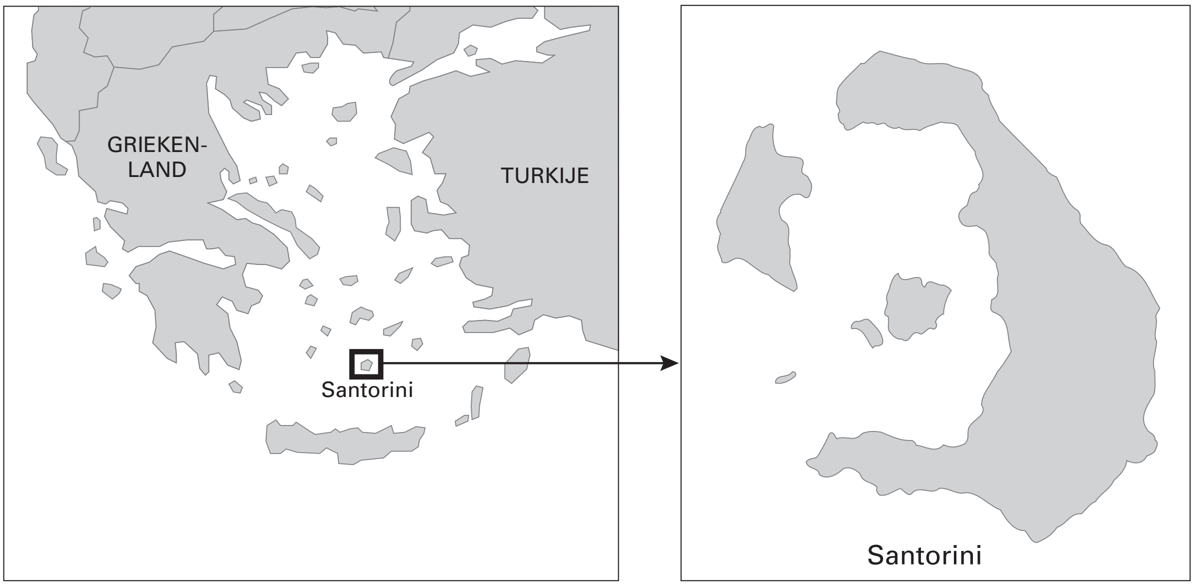
Een studentenvereniging bestaande uit 20 studenten spreekt af dat ieder lid het gewonnen prijzengeld in de clubkas stort. Aan het eind van het studiejaar zal er dan een activiteit georganiseerd worden die betaald wordt met het prijzengeld.

3p **2** ☐ Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat minstens acht leden van de studentenvereniging in de prijzen vallen.

4p **3** ☐ Bereken hoeveel prijzengeld de studentenvereniging bij de twee trekkingen naar verwachting zal winnen.

Conflictlijnen

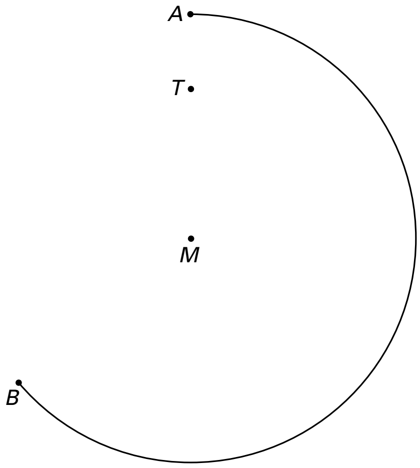
figuur 1



Santorini is een Grieks eiland. Door een vulkaanuitbarsting ruim 3550 jaar geleden is meer dan de helft van het eiland verzonken in zee. Het overgebleven deel van het eiland heeft de vorm van een croissant. Zie figuur 1.

Geïnspireerd door de merkwaardige vorm van dit eiland gaan we over op het volgende wiskundige model.
Boog AB is een gedeelte van de cirkel met middelpunt M en straal MA. De punten A, T en M liggen op één lijn. Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de bijlage bij vraag 4.

figuur 2



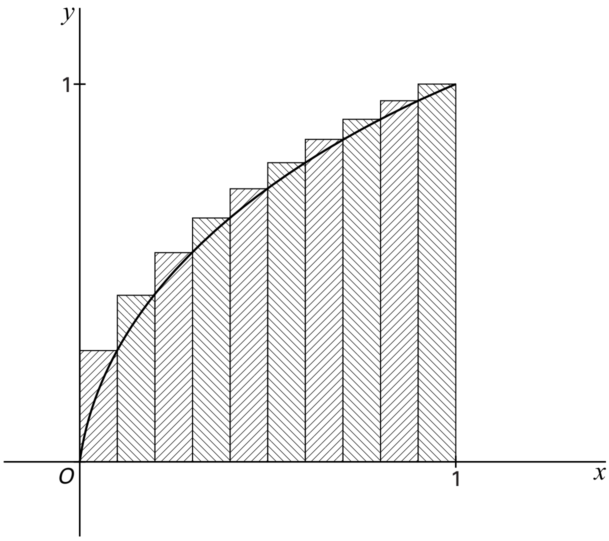
Veronderstel dat het vlak volgens het naaste-buurprincipe wordt verdeeld tussen T en boog AB. De grens bestaat uit twee rechte delen en één gebogen deel.

8p **4** ☐ Teken de grens in de figuur op de bijlage en geef bij elk van de drie delen een toelichting.

Wortels optellen

Voor kleine waarden van n is de som $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}$ nog wel uit te rekenen met de grafische rekenmachine. Voor grote waarden van n is dat zelfs voor de GR tijdrovend. Om voor grote waarden van n een schatting te hebben van de som bekijken we bovensommen van $y=\sqrt{x}$ op het interval [0, 1].

figuur 3



In figuur 3 is de grafiek van $y=\sqrt{x}$ getekend op het interval [0, 1].
Dit interval is in tien even brede stukjes verdeeld. De som van de oppervlaktes van de tien gearceerde rechthoekjes is de bovensom; deze geven we aan met B_{10}.
Figuur 3 is zonder arcering ook op de bijlage bij de vragen 5 en 6 getekend.

4p **5** ☐ Toon aan: $B_{10}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+........+\sqrt{10})$.

De ondersom die hoort bij de verdeling van het interval [0, 1] in tien even brede stukjes geven we aan met O_{10}.

4p **6** ☐ Toon aan: $B_{10}-O_{10}=\dfrac{1}{10}$.

Het interval [0, 1] wordt in n even brede stukjes verdeeld. B_n is de bijbehorende bovensom en O_n is de bijbehorende ondersom. Aangetoond kan worden dat

$B_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+............+\sqrt{n})$ en $B_n-O_n=\dfrac{1}{n}$.

A is de oppervlakte onder de grafiek van $y=\sqrt{x}$ op [0, 1].

4p **7** ☐ Toon aan dat uit $A<B_n$ en $A>O_n$ volgt: $A\cdot n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+........+\sqrt{n}<A\cdot n\sqrt{n}+\sqrt{n}$.

Met behulp van deze ongelijkheid kan voor $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+........+\sqrt{10000}$ een benadering berekend worden die ten hoogste 50 afwijkt van de werkelijke waarde.

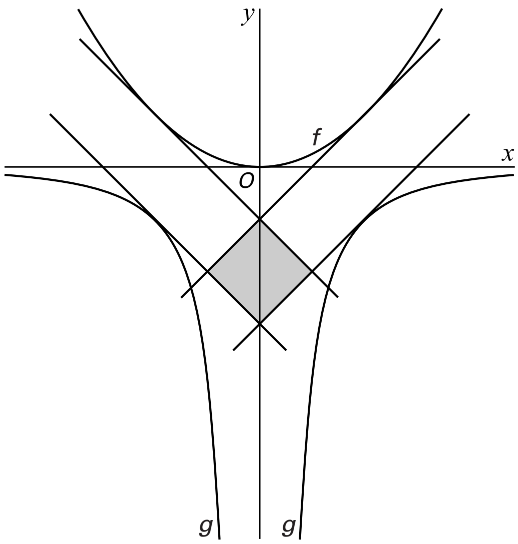
5p **8** ☐ Bereken deze benadering.

Oppervlaktes en rijen

Gegeven zijn de functies $f: x \to \frac{1}{4}x^2$ en $g: x \to -\frac{4}{x^2}$.

De raaklijnen aan de grafieken van *f* en *g* met richtingscoëfficiënt 1 en richtingscoëfficiënt –1 sluiten een vierkant in. Zie figuur 4.

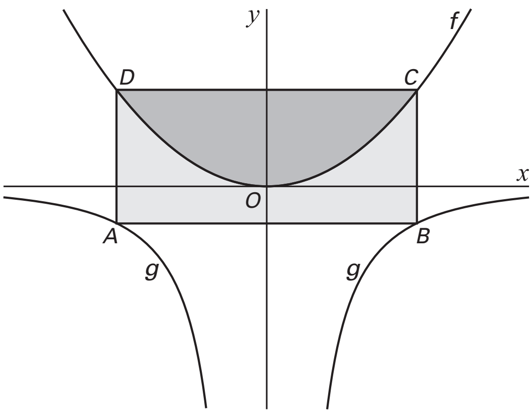
figuur 4



8p **9** ☐ Bereken de oppervlakte van dit vierkant.

De lijn $x = a$, met $a > 0$, snijdt de grafiek van *f* in C en de grafiek van *g* in B. De lijn $x = -a$ snijdt de grafiek van *f* in D en de grafiek van *g* in A.
De grafiek van *f* deelt de rechthoek $ABCD$ in twee stukken met gelijke oppervlaktes. Zie figuur 5.

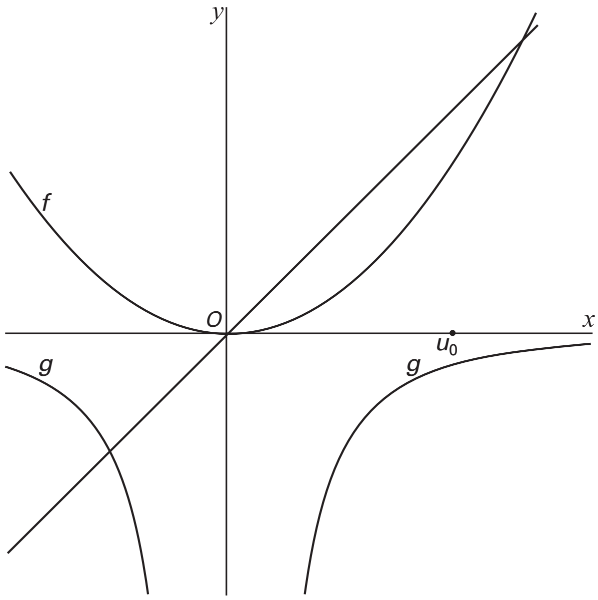
figuur 5



7p **10** ☐ Bereken de waarde van a.

Bij een startwaarde $u_0 > 0$ is de rij van positieve getallen u_n gedefinieerd door $u_n = f(u_{n-1})$.
De rij van negatieve getallen v_n is gedefinieerd door $v_n = g(u_n)$.
In figuur 6 zijn de plaats van u_0 op de x-as, de grafieken van f en g en de lijn $y = x$ getekend.
Deze figuur staat ook op de bijlage bij vraag 11.

figuur 6



5p **11** ☐ Teken in de figuur op de bijlage bij vraag 11 de plaats van v_2 op de x-as.

Bij een bepaalde startwaarde u_0 krijgt v_1 de waarde -1.

6p **12** ☐ Bereken deze startwaarde u_0.

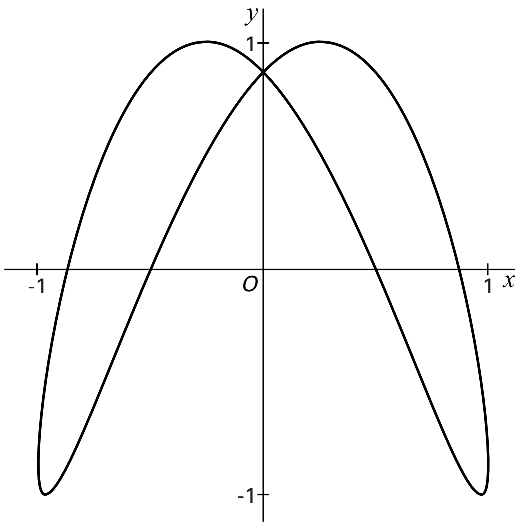
Lissajous-kromme

De baan van een punt P wordt bepaald door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(2t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

Zie figuur 7.

figuur 7



4p **13** ☐ Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan met de x-as.

P passeert de y-as steeds met dezelfde snelheid.

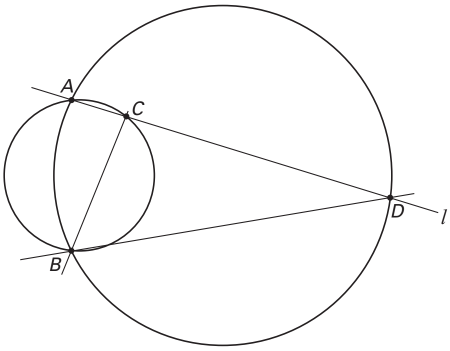
7p **14** ☐ Bereken de exacte waarde van deze snelheid.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Lijn door het snijpunt van twee cirkels

Gegeven zijn twee cirkels die elkaar snijden in de punten A en B.
Lijn l gaat door het punt A en snijdt de cirkels in de punten C en D. Zie figuur 8.
Deze figuur staat ook op de bijlage bij vraag 15.

figuur 8

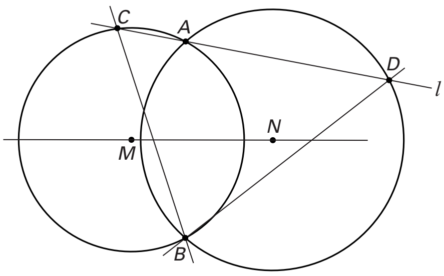


Door de lijn l om A te draaien verandert driehoek BCD.

4p **15** ☐ Toon aan dat de grootte van $\angle CBD$ onafhankelijk is van de stand van l.

In figuur 9 zijn opnieuw twee cirkels getekend die elkaar snijden in de punten A en B. De middelpunten van deze cirkels zijn M en N. Lijn l door het punt A snijdt de cirkels weer in de punten C en D. Deze figuur staat op de bijlage bij de vragen 16 en 17.

figuur 9



3p **16** ☐ Bewijs dat $\angle AMN = \angle ACB$.

4p **17** ☐ Bewijs dat $\angle MAN = \angle CBD$.

Einde