Wiskunde B1 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

2003

Tijdvak 1
Donderdag 22 mei
13.30 – 16.30 uur

**Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 8 en 9 is een bijlage toegevoegd.**

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Lengte

Uit statistisch onderzoek is gebleken dat de volwassen Nederlandse mannen in 1999 gemiddeld 180,0 cm lang waren, en dat er een standaardafwijking van 12,8 cm was in de lengteverdeling. De normale verdeling met 180,0 als verwachtingswaarde en 12,8 als standaardafwijking past goed bij de werkelijke lengteverdeling. In de volgende vraag werken we met deze normale verdeling.

3p **1** ☐ Hoe groot is bij deze verdeling de kans dat vier willekeurig gekozen mannen alle vier korter dan 200 cm zijn?

Uit hetzelfde onderzoek bleek dat de volwassen Nederlandse vrouwen in dat jaar een gemiddelde lengte hadden van 167,0 cm. Verder bleek dat 27,8% van deze vrouwen langer was dan 177 cm. Neem aan dat bij de waargenomen lengteverdeling een normale verdeling past met 167,0 als verwachtingswaarde.

4p **2** ☐ Hoe moet je de standaardafwijking van deze normale verdeling kiezen om ervoor te zorgen dat de kans op een lengte groter dan 177 cm gelijk is aan 27,8%?

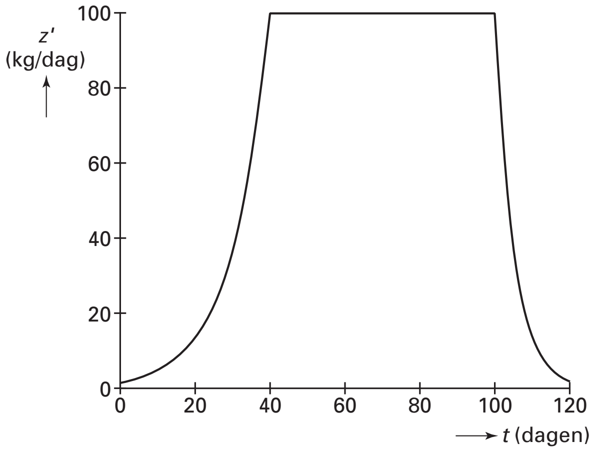
Zomertarwe

Een akker wordt op 1 april ingezaaid met zomertarwe. De tarwe wordt geoogst op 30 juli. In de 120 dagen tussen zaaien en oogsten groeien de planten niet steeds even hard. Aanvankelijk groeien de planten steeds sneller. Als de planten groter worden gaan ze elkaar meer hinderen, waardoor de groeisnelheid nagenoeg constant wordt. Tegen het einde van het groeiseizoen gaan de tarweplanten steeds langzamer groeien.
Het gewicht van de tarweplanten in kilogrammen noemen we z. De tijd in dagen noemen we t; $t = 0$ op 1 april, $t = 120$ op 30 juli.
$z'(t)$ is de snelheid waarmee z groeit op tijdstip t (in kg/dag). Biologen hanteren voor de drie groeifasen wel het volgende model:

- fase 1: exponentiële groei voor $0 \le t < 40$ geldt: $z'(t) = 100 \cdot e^{0,1(t-40)}$
- fase 2: lineaire groei voor $40 \le t < 100$ geldt: $z'(t) = 100$
- fase 3: tanende groei voor $100 \le t < 120$ geldt: $z'(t) = 100 \cdot e^{-0,2(t-100)}$

In figuur 1 staat de grafiek van z'.

figuur 1



Bij elk tijdstip t_1 in fase 1 is er een tijdstip t_3 in fase 3 waarop de tarweplanten even snel groeien als op t_1.

4p **3** ☐ Bereken t_3 exact als $t_1 = 18$.

De hoeveelheid zaaigoed is 30 kg. Dus $z(0) = 30$.

Er zijn getallen a en b, zo dat voor fase 1 geldt: $z(t) = a \cdot e^{0,1(t-40)} + b$

4p **4** ☐ Bereken a en b. Rond de waarde van b af op twee decimalen.

Op elk tijdstip t is het gewicht te bepalen met $z(t) = z(0) + \int_0^t z'(s)\,ds$

Er geldt: $z(100) \approx 7011,68$.

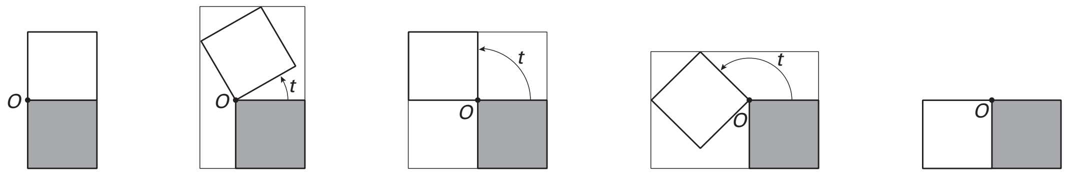
6p **5** ☐ Toon dit aan.

3p **6** ☐ Bereken het gewicht van de tarweplanten op 30 juli.

Twee scharnierende vierkanten

Twee vierkanten, beide met zijde 1, hebben het hoekpunt O gemeenschappelijk. Het onderste vierkant ligt vast. Het bovenste vierkant wordt om O gedraaid; t is de draaihoek in radialen. In figuur 2 zijn tussen de begin- en eindstand drie tussenstanden getekend. Om de twee vierkanten is steeds een zo klein mogelijke rechthoek getekend, met twee zijden langs het vaste vierkant.

figuur 2



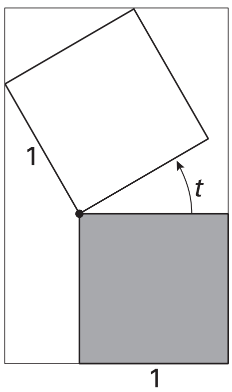
De oppervlakte R van de omhullende rechthoek is een functie van de draaihoek t.

3p **7** ☐ Bereken de oppervlakte R voor $t = \frac{1}{4}\pi$.

Voor elke waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ geldt: $R(t) = (1 + \sin t)(1 + \sin t + \cos t)$.

In figuur 3 en op de bijlage is de situatie getekend voor een waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.

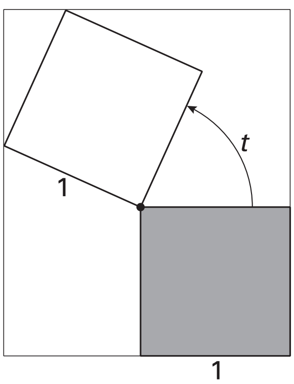
figuur 3



4p **8** ☐ Toon de juistheid van de formule aan voor elke waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.

Er zijn tussen de begin- en de eindstand twee posities van de vierkanten waarvoor $R(t)$ maximaal is. In figuur 4 en op de bijlage is één van die posities getekend.

figuur 4



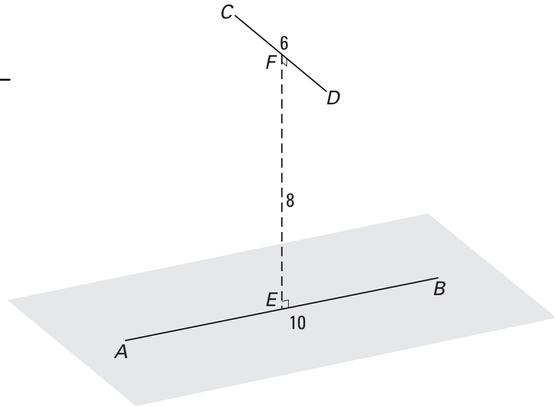
4p **9** ☐ Teken in de figuur op de bijlage de andere positie van de vierkantjes waarvoor $R(t)$ maximaal is. Licht je werkwijze toe.

3p **10** ☐ Toon met behulp van differentiëren aan dat $R'(0) = 3$.

Inhoud viervlak

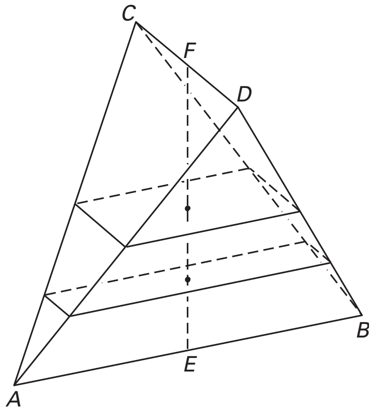
Lijnstuk AB ligt in een horizontaal vlak. Lijnstuk CD is evenwijdig aan dat vlak, op afstand 8. Lijnstuk AB heeft lengte 10 en lijnstuk CD heeft lengte 6.
De lijnstukken AB en CD staan loodrecht op elkaar. E en F zijn de middens van AB en CD.
EF staat loodrecht op AB en op CD. Zie figuur 5.

figuur 5

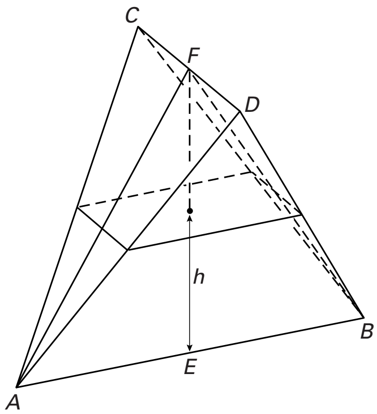


Door de punten A en B te verbinden met de punten C en D ontstaat het viervlak $ABCD$.
In het viervlak brengen we horizontale doorsneden aan. Omdat AB en CD loodrecht op elkaar staan, zijn de doorsneden rechthoeken.
In figuur 6 is als voorbeeld op twee hoogten de doorsnede getekend. (De hoogte wordt gemeten langs het lijnstuk EF.)

figuur 6



figuur 7



In figuur 7 is zo'n doorsnede op hoogte h boven het horizontale vlak getekend, met $0 < h < 8$.
Met behulp van driehoek ABF kan de lengte van de zijde van de rechthoek die in vlak ABD ligt, in h worden uitgedrukt.

De lengte van deze zijde is gelijk aan $10 - \frac{5}{4}h$.

4p **11** ☐ Toon dit aan.

De lengte van de andere zijde is gelijk aan $\frac{3}{4}h$.

5p **12** ☐ Onderzoek door een berekening of de doorsnede met de grootste oppervlakte een vierkant is.

Omdat we de oppervlakte van de doorsnede op elke hoogte h kennen, kunnen we met een integraal de inhoud van het viervlak $ABCD$ berekenen.

5p **13** ☐ Bereken exact de inhoud van het viervlak $ABCD$.

Osteoporose

Osteoporose of botontkalking is een kwaal die vooral bij oudere mensen optreedt en verergert naarmate men ouder wordt. Bij het ouder worden maakt het lichaam minder bot aan dan er afgebroken wordt. Het gevolg is dat botten poreuzer worden en de kans op botbreuk dus toeneemt.

In deze opgave beperken we ons tot de risicogroep, personen van 55 jaar en ouder.
Onderzoek wijst uit dat 1 op de 4 vrouwen aan osteoporose lijdt.
Bij mannen is dat 1 op de 12.

Bij een controle op osteoporose onder 100 aselect gekozen vrouwen wordt bij een aantal vrouwen osteoporose geconstateerd.

3p **14** ☐ Bereken de kans dat dit aantal 30 is.

Bij een controle onder vijf aselect gekozen mannen en vijf aselect gekozen vrouwen wordt bij een aantal van hen osteoporose geconstateerd.

7p **15** ☐ Bereken de kans dat dit aantal 2 is.

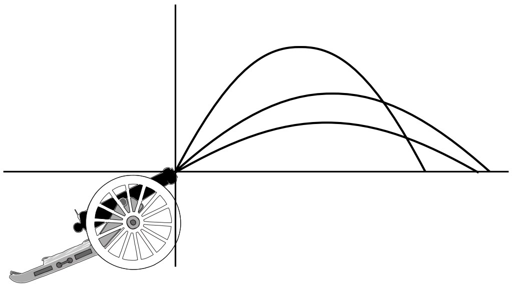
In 1998 bestond in Nederland de risicogroep voor 55,6% uit vrouwen.

4p **16** ☐ Bereken hoeveel procent van de osteoporose-patiënten uit de risicogroep vrouw was.

Kogelbanen

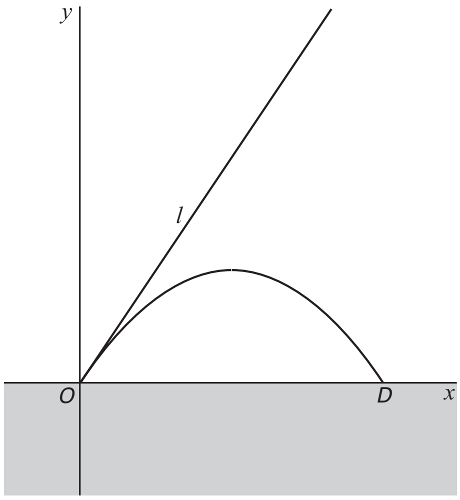
Vanuit een bepaald punt worden kogels afgeschoten met steeds dezelfde beginsnelheid. De hoek waaronder men de kogels afschiet, varieert. Zie figuur 8.

figuur 8



We brengen een assenstelsel aan in het vlak van de kogelbaan, met de x-as horizontaal en de y-as verticaal. De kogels worden afgeschoten in het punt (0, 0) en komen neer in een punt D op de x-as. Zie figuur 9. In deze figuur is behalve de kogelbaan ook de raaklijn l in (0, 0) aan deze baan getekend. De kogel wordt weggeschoten in de richting van l.

figuur 9



Uit de mechanica is bekend dat een kogelbaan een deel van een parabool is.
Een vergelijking van de kogelbaan is:
$y = rx - (0{,}1 + 0{,}1r^2)x^2$
Hierbij is r een constante die afhangt van de hoek waaronder geschoten wordt.

De richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan r.

4p **17** ☐ Toon dit aan.

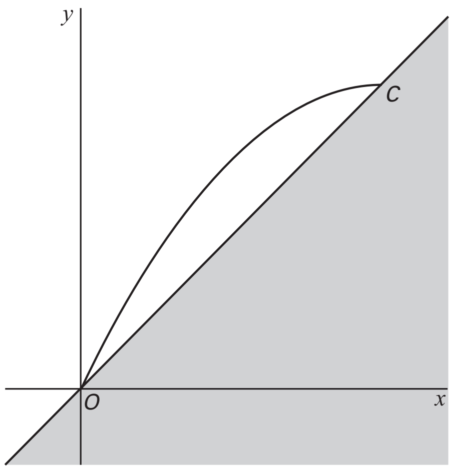
Er geldt: $OD = \dfrac{10r}{1+r^2}$

4p **18** ☐ Toon dit aan.

5p **19** ☐ Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van r de afstand OD maximaal is.

Veronderstel dat de kogel niet op een horizontaal terrein wordt afgeschoten, maar op een hellend terrein met richtingscoëfficiënt 1. Zie figuur 10.
Het hangt van r af waar de kogel op het terrein neerkomt. Dit punt noemen we C.

figuur 10



De x-coördinaat van punt C is $\dfrac{10(r-1)}{1+r^2}$.

4p **20** ☐ Bereken de maximale lengte van OC in twee decimalen nauwkeurig.

Einde