Wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **02**

Tijdvak 2
Woensdag 19 juni
13.30 – 16.30 uur

**Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen; het examen bestaat uit 16 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 4, 11, 12, 15 en 16 is een bijlage toegevoegd.**

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

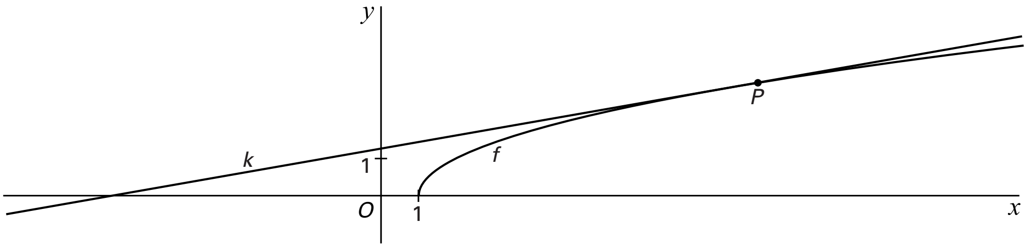
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Oppervlakte

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x-1}$.

De lijn k raakt aan de grafiek van f in het punt $P(10, 3)$. Zie figuur 1.

figuur 1



5p **1** ☐ Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van k.

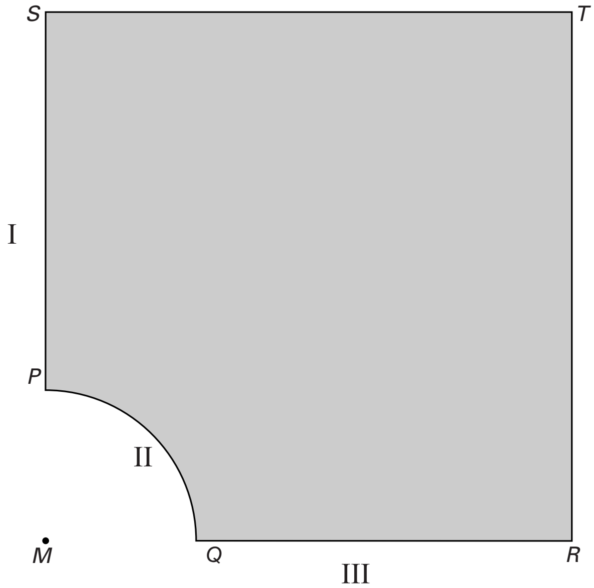
De grafiek van f, de lijn k en de x-as sluiten een vlakdeel in.

7p **2** ☐ Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.

Verdeling

Het grijze gebied in figuur 2 is een deel van het vierkant $MRTS$ met zijde 7. De grens PQ is een kwartcirkel met middelpunt M en straal 2. Deze figuur staat ook op de bijlage.
Er zijn drie landen, I, II en III, die alle drie aan het grijs gekleurde gebied grenzen. De grenzen met die landen zijn respectievelijk SP, PQ en QR.
Het grijze gebied wordt onder de drie landen verdeeld volgens het naaste-buur-principe.

figuur 2



In het grijze gebied ligt op de lijn MT een punt D dat even ver van de drie landen ligt.

3p **3** ☐ Bereken de afstand van D tot de drie landen in twee decimalen nauwkeurig.

7p **4** ☐ Teken in de figuur op de bijlage de conflictlijnen tussen de drie landen in het grijze gebied. Licht je werkwijze toe.

Een Lissajous-figuur

De bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin t \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ beschrijven de baan van een bewegend punt. Deze baan heeft precies vier punten met de y-as gemeen.

4p **5** ☐ Bereken de coördinaten van deze punten.

Tijdens de beweging verandert de snelheid van het punt voortdurend. De hoogste snelheid die het punt kan bereiken wordt enkele malen bereikt. Als je de beweging op de GR simuleert, lijkt het alsof deze hoogste waarde bereikt wordt bij het passeren van de y-as.

8p **6** ☐ Toon aan dat dit *niet* het geval is.

Schone-grond-verklaring

Om te mogen bouwen op een perceel grond is een zogeheten schone-grond-verklaring nodig.
Een onafhankelijke instantie neemt twee grondmonsters van zo'n perceel.
Van elk perceel wordt in een laboratorium één monster getest op verontreiniging.
Als er geen verontreiniging wordt aangetroffen, wordt een schone-grond-verklaring afgegeven voor het betreffende perceel.

Ga in deze opgave uit van de volgende veronderstellingen:
Als de grond van een perceel verontreinigd is, wordt die verontreiniging in elk monster van dat perceel aangetroffen.
De kans dat een perceel verontreinigd is, is 1%.
De kansen op verontreiniging voor verschillende percelen zijn onafhankelijk van elkaar.

Het testen van een monster is een kostbare zaak. In plaats van het afzonderlijk testen van de grond van elk perceel worden – om kosten te besparen – de grondmonsters van meerdere percelen bij elkaar gevoegd en als één geheel getest.

Veronderstel dat men grondmonsters van vijf percelen bij elkaar neemt en dit mengsel test. Als er geen verontreiniging in dit mengsel wordt aangetroffen, wordt voor elk van de betreffende vijf percelen een schone-grond-verklaring afgegeven. Als er wel verontreiniging wordt aangetroffen test men van elk van de vijf percelen het tweede monster apart.

3p **7** ☐ Bewijs dat de kans dat men de tweede monsters zal moeten testen, afgerond op drie decimalen, gelijk is aan 0,049.

Het nemen van twee grondmonsters van een perceel kost € 20,–. Een test in het laboratorium kost € 150,–.

6p **8** ☐ Toon aan dat de te verwachten *kostenbesparing* op het onderzoek van vijf percelen grond op deze manier € 563,25 is.

Uit de uitkomst van vraag 8 blijkt dat het inderdaad kostenbesparend is om een aantal monsters tegelijk te testen. Men vraagt zich af of een verdere kostenbesparing te realiseren is.
De grondmonsters van n percelen worden bij elkaar genomen.

5p **9** ☐ Bewijs dat de verwachtingswaarde van de *kosten per perceel* gelijk is aan

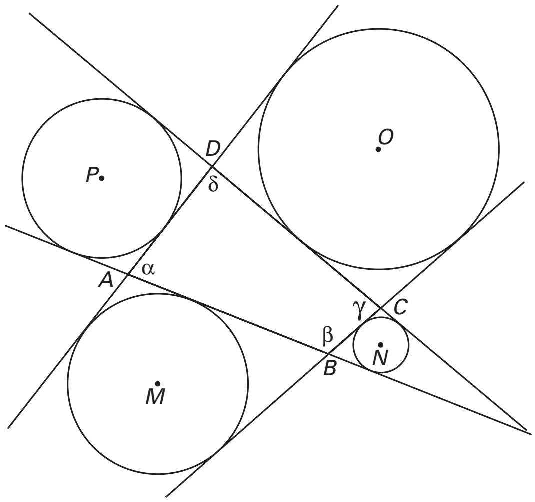
$$170 + \frac{150}{n} - 150 \cdot (0{,}99)^n$$

3p **10** ☐ Bereken bij welke waarde van n deze verwachtingswaarde minimaal is.

Aangeschreven cirkels

Gegeven is een vierhoek *ABCD* met hoeken α, β, γ en δ. De cirkel die raakt aan een zijde van de vierhoek en aan de verlengden van de twee aangrenzende zijden, noemen we een aangeschreven cirkel van de vierhoek. De middelpunten van de aangeschreven cirkels van vierhoek *ABCD* zijn *M*, *N*, *O* en *P*. Zie figuur 3. Deze figuur staat ook op de bijlage.

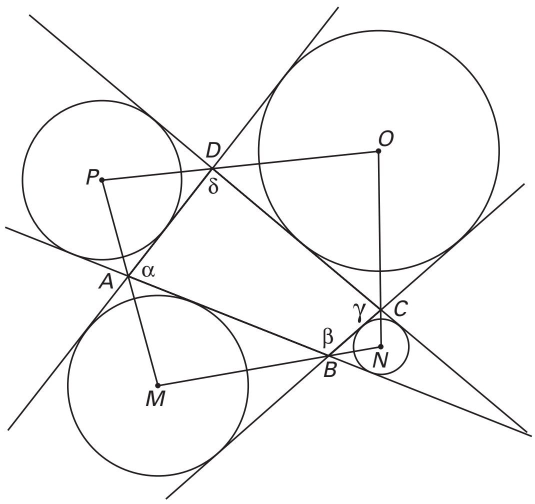
figuur 3



5p **11** ☐ Bewijs dat de punten *M*, *B* en *N* op één lijn liggen.

We weten nu dat *A*, *B*, *C* en *D* op de zijden van vierhoek *MNOP* liggen. Zie figuur 4. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 4



7p **12** ☐ Bewijs dat de punten *M*, *N*, *O* en *P* op één cirkel liggen.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Functies met een rij

Gegeven zijn de functies $f_k(x) = \dfrac{\ln(kx)}{x}$ met $k \neq 0$.

Voor elke waarde van $k \neq 0$ heeft de grafiek van f_k één top.

6p **13** ☐ Bewijs dat voor elke waarde van $k \neq 0$ de top van de grafiek van f_k op de kromme $y = \dfrac{1}{x}$ ligt.

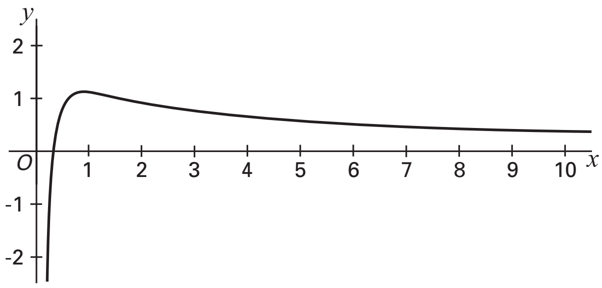
De waarde van k wordt zodanig gekozen, dat de grafiek van f_k de lijn $y = 1$ snijdt in de punten A en B. De lengte van het lijnstuk AB hangt af van de keuze van k.

6p **14** ☐ Wat is de kleinste gehele waarde van k waarvoor de lengte van AB groter is dan 2? Licht je antwoord toe.

In de rest van deze opgave werken we met de functie f_3. Deze functie duiden we aan met de letter h, dus $h(x) = \dfrac{\ln 3x}{x}$. Zie figuur 5 voor de grafiek van h.

Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 5



De functie h heeft twee dekpunten, a en b, waarbij geldt: $a < b$.

4p **15** ☐ Benader a en b in drie decimalen nauwkeurig.

De rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ is gedefinieerd door $u_{n+1} = h(u_n)$ met startwaarde u_0.

5p **16** ☐ Teken in de figuur op de bijlage op de x-as alle startwaarden waarvoor de limiet van de rij gelijk is aan a. Licht je werkwijze toe.

Einde