Wiskunde B1 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **02**

Tijdvak 2
Woensdag 19 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen; het examen bestaat uit 17 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Cesuur bij examens

Bij de eindexamens in de jaren 1997 tot en met 2000 werden aan enkele VWO-scholen experimentele examens afgenomen in het vak wiskunde-B. Bij deze examens waren elk jaar maximaal 90 punten te behalen.
Na afname van een examen bepaalt een overheidsinstelling de grens tussen onvoldoende en voldoende, de zogeheten cesuur. Cesuur 44/45 betekent dat kandidaten met een score van 45 of meer punten een voldoende krijgen en kandidaten met een score van 44 of minder punten een onvoldoende.

Bij het experimentele examen in 1997 waren de scores bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 52,0 en standaardafwijking 16,0. De cesuur was 44/45. De grens tussen onvoldoende en voldoende lag dus bij 44,5 punten. De vragen 1 en 2 hebben betrekking op het experimentele examen in 1997.

3p **1** □ Bereken het percentage onvoldoendes.

Er zijn onderwijskundigen die van mening zijn dat het percentage onvoldoendes bij een examen 25% zou moeten zijn.

3p **2** □ Bereken bij welke cesuur het percentage onvoldoendes het dichtst bij 25% ligt.

Tabel 1 bevat de cumulatieve frequenties van alle scores bij het experimentele examen in 2000. In deze tabel is onder andere af te lezen dat bij een cesuur van 44/45 het aantal onvoldoendes 104 zou bedragen.

tabel 1

score	freq.	cum. freq.	score	freq.	cum. freq.	score	freq.	cum. freq.	score	freq.	cum. freq.
0	0	0	**23**	2	11	**46**	3	112	**69**	0	215
1	0	0	**24**	0	11	**47**	5	117	**70**	0	215
2	1	1	**25**	6	17	**48**	6	123	**71**	3	218
3	0	1	**26**	1	18	**49**	4	127	**72**	1	219
4	0	1	**27**	3	21	**50**	9	136	**73**	4	223
5	0	1	**28**	2	23	**51**	7	143	**74**	5	228
6	0	1	**29**	5	28	**52**	7	150	**75**	1	229
7	0	1	**30**	2	30	**53**	5	155	**76**	0	229
8	0	1	**31**	1	31	**54**	1	156	**77**	3	232
9	0	1	**32**	4	35	**55**	2	158	**78**	1	233
10	2	3	**33**	1	36	**56**	6	164	**79**	0	233
11	0	3	**34**	9	45	**57**	7	171	**80**	0	233
12	0	3	**35**	4	49	**58**	6	177	**81**	1	234
13	0	3	**36**	4	53	**59**	3	180	**82**	2	236
14	0	3	**37**	7	60	**60**	8	188	**83**	1	237
15	0	3	**38**	8	68	**61**	2	190	**84**	1	238
16	0	3	**39**	11	79	**62**	1	191	**85**	1	239
17	0	3	**40**	8	87	**63**	6	197	**86**	1	240
18	2	5	**41**	4	91	**64**	1	198	**87**	1	241
19	3	8	**42**	5	96	**65**	6	204	**88**	1	242
20	0	8	**43**	4	100	**66**	3	207	**89**	0	242
21	0	8	**44**	4	104	**67**	6	213	**90**	2	244
22	1	9	**45**	5	109	**68**	2	215			

3p **3** □ Lees uit tabel 1 af bij welke cesuur het percentage onvoldoendes het dichtst bij 25% ligt.

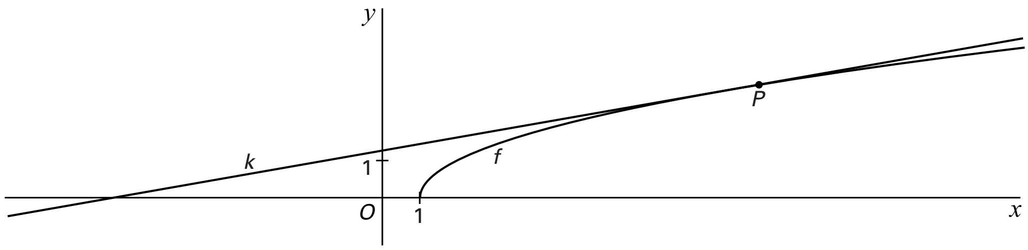
Men vraagt zich af of de verdeling uit tabel 1 redelijk benaderd kan worden door de normale verdeling. Het gemiddelde uit tabel 1 is 49,0 en de standaardafwijking 16,5.
6p **4** □ Onderzoek of de verdeling uit tabel 1 voldoet aan de vuistregels van de normale verdeling.

Oppervlakte

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x-1}$.

De lijn k raakt aan de grafiek van f in het punt $P(10, 3)$. Zie figuur 1.

figuur 1



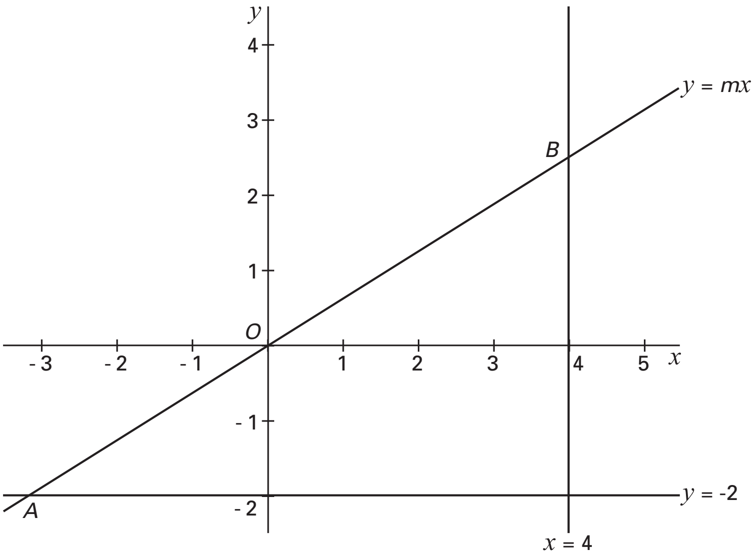
5p **5** ☐ Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van k.

De grafiek van f, de lijn k en de x-as sluiten een vlakdeel in.

7p **6** ☐ Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.

Kortste weg

figuur 2

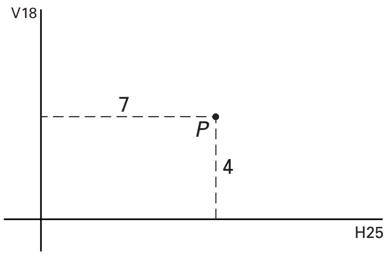


We bekijken de lijn l met vergelijking $y = mx$, met $m > 0$.
De lijn l snijdt de lijn $y = -2$ in A en de lijn $x = 4$ in B. Zie figuur 2.

6p **7** ☐ Bewijs dat voor elke positieve waarde van m de lengte van het lijnstuk AB gelijk is aan $\sqrt{(4m+2)^2 + (\frac{2}{m}+4)^2}$.

Los nu het volgende probleem op.

figuur 3



Plaats P ligt dichtbij het kruispunt van twee wegen, de H25 en de V18. De wegen snijden elkaar loodrecht. Plaats P ligt 4 km van de H25 en 7 km van de V18 af.
Er wordt een nieuwe rechte weg aangelegd die de twee wegen met elkaar verbindt. De nieuwe weg moet door plaats P gaan. Zie figuur 3.

5p **8** ☐ Bereken in meters nauwkeurig de lengte van de kortste weg die aan deze eisen voldoet.

Schone-grond-verklaring

Om te mogen bouwen op een perceel grond is een zogeheten schone-grond-verklaring nodig.
Een onafhankelijke instantie neemt twee grondmonsters van zo'n perceel.
Van elk perceel wordt in een laboratorium één monster getest op verontreiniging.
Als er geen verontreiniging wordt aangetroffen, wordt een schone-grond-verklaring afgegeven voor het betreffende perceel.

Ga in deze opgave uit van de volgende veronderstellingen:
Als de grond van een perceel verontreinigd is, wordt die verontreiniging in elk monster van dat perceel aangetroffen.
De kans dat een perceel verontreinigd is, is 1%.
De kansen op verontreiniging voor verschillende percelen zijn onafhankelijk van elkaar.

Het testen van een monster is een kostbare zaak. In plaats van het afzonderlijk testen van de grond van elk perceel worden – om kosten te besparen – de grondmonsters van meerdere percelen bij elkaar gevoegd en als één geheel getest.

Veronderstel dat men grondmonsters van vijf percelen bij elkaar neemt en dit mengsel test. Als er geen verontreiniging in dit mengsel wordt aangetroffen, wordt voor elk van de betreffende vijf percelen een schone-grond-verklaring afgegeven. Als er wel verontreiniging wordt aangetroffen test men van elk van de vijf percelen het tweede monster apart.

3p **9** ☐ Bewijs dat de kans dat men de tweede monsters zal moeten testen, afgerond op drie decimalen, gelijk is aan 0,049.

Het nemen van twee grondmonsters van een perceel kost € 20,–. Een test in het laboratorium kost € 150,–.

6p **10** ☐ Toon aan dat de te verwachten *kostenbesparing* op het onderzoek van vijf percelen grond op deze manier € 563,25 is.

Uit de uitkomst van vraag 10 blijkt dat het inderdaad kostenbesparend is om een aantal monsters tegelijk te testen. Men vraagt zich af of een verdere kostenbesparing te realiseren is.
De grondmonsters van n percelen worden bij elkaar genomen.

5p **11** ☐ Bewijs dat de verwachtingswaarde van de *kosten per perceel* gelijk is aan

$$170+\frac{150}{n}-150\cdot(0,99)^n$$

3p **12** ☐ Bereken bij welke waarde van n deze verwachtingswaarde minimaal is.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Een Lissajous-figuur

De bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin t \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ beschrijven de baan van een bewegend punt. Deze baan heeft precies vier punten met de y-as gemeen.

4p **13** ☐ Bereken de coördinaten van deze punten.

Tijdens de beweging verandert de snelheid van het punt voortdurend. De hoogste snelheid die het punt kan bereiken wordt enkele malen bereikt. Als je de beweging op de GR simuleert, lijkt het alsof deze hoogste waarde bereikt wordt bij het passeren van de y-as.

8p **14** ☐ Toon aan dat dit *niet* het geval is.

Een verzameling toppen

Gegeven zijn de functies $f_k(x) = \dfrac{\ln(kx)}{x}$ met $k \neq 0$.

Neem $k = 1$.

4p **15** ☐ Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f_1.

Voor elke waarde van $k \neq 0$ heeft de grafiek van f_k één top.

De top van de grafiek van f_1 ligt op de kromme met vergelijking $y = \dfrac{1}{x}$.

6p **16** ☐ Bewijs dat voor elke waarde van $k \neq 0$ de top van de grafiek van f_k op de kromme $y = \dfrac{1}{x}$ ligt.

De waarde van k wordt zodanig gekozen, dat de grafiek van f_k de lijn $y = 1$ snijdt in de punten A en B. De lengte van het lijnstuk AB hangt af van de keuze van k.

6p **17** ☐ Wat is de kleinste gehele waarde van k waarvoor de lengte van AB groter is dan 2? Licht je antwoord toe.

Einde