Wiskunde B Profi (oude stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 01

Tijdvak 2
Woensdag 20 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen; het examen bestaat uit 14 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 1, 2, 3, 4, 5, 11 en 14 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

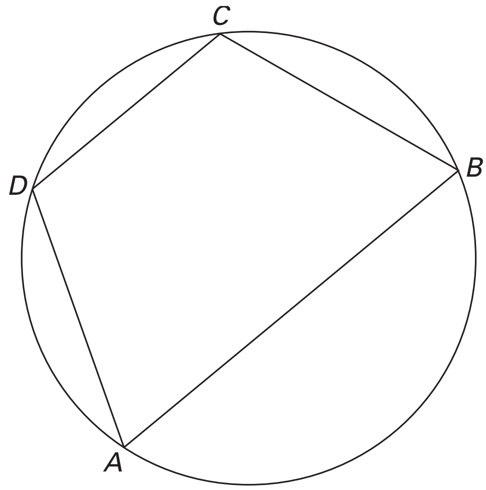
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Begin

Koordentrapezium

In figuur 1 is koordenvierhoek $ABCD$ getekend. AB is evenwijdig aan DC; $ABCD$ is dus een trapezium. De figuur is ook op de bijlage getekend.

figuur 1

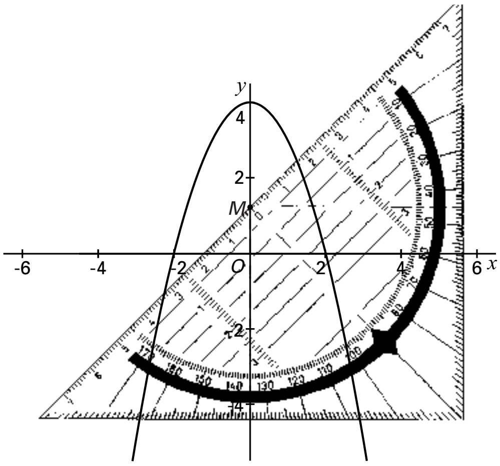


5p **1** □ Bewijs de volgende stelling:
Als een koordenvierhoek een trapezium is, heeft hij twee overstaande zijden die even lang zijn.

Verschuivende geodriehoek

In figuur 2 is de parabool $y = 4 - x^2$ getekend. Ook is een geodriehoek getekend met de twee rechthoekszijden evenwijdig aan de x-as en de y-as; de schuine zijde maakt dus een hoek van 45° met de x-as. Het midden M van de schuine zijde ligt op de y-as. De parabool is ook getekend op de bijlage.

figuur 2



Bij elk van de volgende vragen wordt de geodriehoek verschoven in verticale richting; na de verschuiving ligt het punt M dus steeds op de y-as.

Na de eerste verschuiving snijdt de schuine zijde van de geodriehoek de parabool in het punt $P(-3, -5)$ en in nog een punt Q.

6p **2** □ Bereken de lengte van het lijnstuk PQ.

Na de tweede verschuiving is de schuine zijde van de geodriehoek raaklijn aan de parabool.

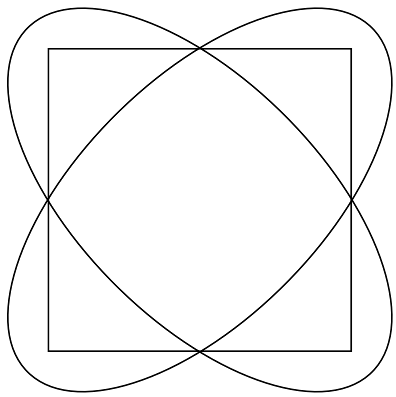
5p **3** □ Bereken de y-coördinaat van M.

Vierkant met twee ellipsen

Van twee congruente ellipsen liggen de brandpunten op de hoeken van een vierkant. Zie figuur 3. Deze figuur staat ook op de bijlage. De ellipsen snijden elkaar in de middens van de zijden van het vierkant.
In elk van de snijpunten van de ellipsen is de hoek tussen de raaklijnen even groot.

7p **4** □ Bereken deze hoek in graden nauwkeurig.

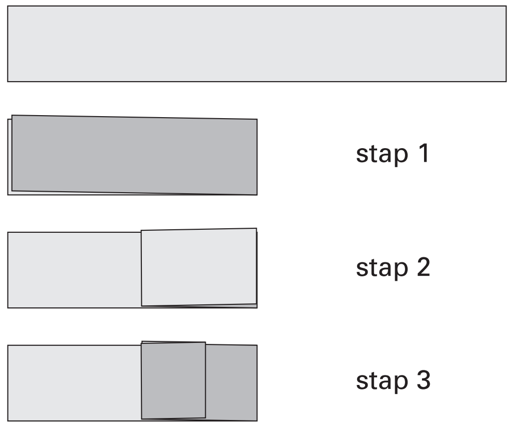
figuur 3



Vouwen

Van een strook papier van 14 cm lengte zit de rechterrand los en is de linkerrand vastgeplakt op de ondergrond. De strook wordt linksom dubbelgevouwen (stap 1 in figuur 4); hierbij verdeelt de vouwlijn de strook in twee gelijke delen. Het bovenste deel wordt rechtsom dubbelgevouwen (stap 2 in figuur 4). Daarna wordt het bovenste deel hiervan weer linksom dubbelgevouwen (stap 3 in figuur 4). Dit proces kan in theorie eindeloos herhaald worden. We willen de limiet van de plaats van de losse rand weten.

figuur 4



De plaats van de losse rand na n keer vouwen noemen we u_n.
De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is gegeven door:

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_1 = 0 \\ u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2}) \quad (n = 2, 3, 4, \ldots) \end{cases}$$

In figuur 5 en op de bijlage zijn op een getallenlijn de startwaarden 14 en 0 aangegeven.

figuur 5

4p **5** □ Geef op de getallenlijn op de bijlage de plaats aan van u_3 en u_4. Licht je werkwijze toe.

De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is convergent. Om de plaats op de getallenlijn van $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ te berekenen, bekijken we de verschilrij $v_k = u_k - u_{k-1}$ $(k = 1, 2, 3, 4, \ldots)$.

5p **6** □ Bewijs dat voor $k = 2, 3, 4, \ldots$ geldt: $v_k = -\frac{1}{2} v_{k-1}$

De termen van de rij u_n zijn te vinden met behulp van de rij v_k:

$u_1 = u_0 + v_1$
$u_2 = u_0 + v_1 + v_2$
$u_3 = u_0 + v_1 + v_2 + v_3$
$\vdots$
$u_n = u_0 + v_1 + \ldots + v_n$

7p **7** □ Toon aan dat voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ geldt: $u_n = 14 + 9\frac{1}{3}((-\frac{1}{2})^n - 1)$.

4p **8** □ Bereken exact de limiet van de plaats van de losse rand.

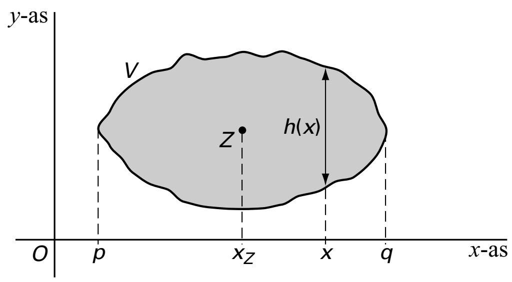
Zwaartepunt

De coördinaten van het zwaartepunt van een vlakdeel kun je met de formule in het kader hieronder berekenen.

Van vlakdeel V is Z het zwaartepunt.
De coördinaten van Z zijn x_Z en y_Z.
Er geldt:

$$x_Z = \frac{1}{\text{oppervlakte van } V} \cdot \int_p^q x \cdot h(x)\,\mathrm{d}x$$

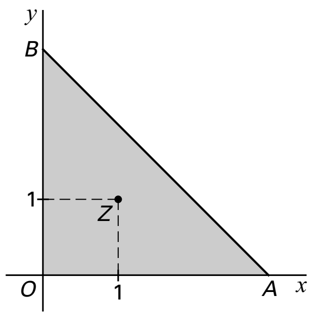
Hierbij is $h(x)$ de bij x behorende hoogte van V, voor $p \le x \le q$.
De berekening van y_Z verloopt op een soortgelijke manier.



De vlakdelen in deze opgave zijn symmetrisch in de lijn $y = x$. Dus geldt $y_Z = x_Z$.

De hoekpunten van driehoek OAB zijn $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ en $B(0, 3)$. Zie figuur 6.

figuur 6

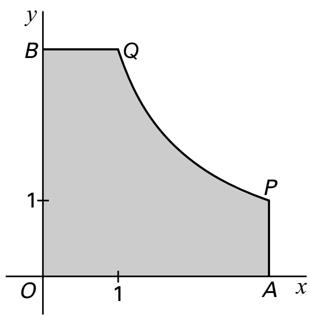


6p **9** □ Toon met de formule in het kader aan dat het zwaartepunt van driehoek OAB het punt $(1, 1)$ is.

Het vlakdeel $OAPQB$ in figuur 7 wordt begrensd door de x-as, de y-as, de lijn $x = 3$, de lijn $y = 3$ en de hyperbool

$$y = \frac{3}{x}.$$

figuur 7



8p **10** □ Bereken exact de x-coördinaat van het zwaartepunt van dit vlakdeel.

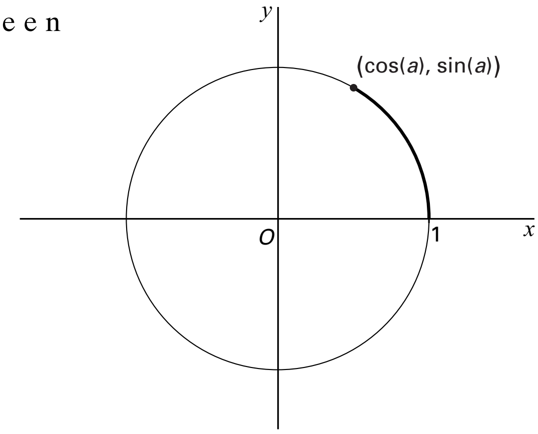
Rechte banen

Een punt P beweegt in een baan die gegeven is door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(a-t) + \cos(t) \\ y(t) = \sin(a-t) + \sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \le a \le \pi$$

In figuur 8 en op de bijlage is in een assenstelsel de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 getekend. Op de cirkel is voor een waarde van a een boog met lengte a getekend.

figuur 8



6p **11** □ Teken in de figuur op de bijlage de plaats van het punt P op de tijdstippen $t = 0$ en $t = \pi$. Licht je werkwijze toe.

De beweging van P kan ook beschreven worden door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(\frac{1}{2}a)\ \cos(\frac{1}{2}a - t) \\ y(t) = 2\sin(\frac{1}{2}a)\ \cos(\frac{1}{2}a - t) \end{cases}$$

4p **12** □ Toon dit aan.

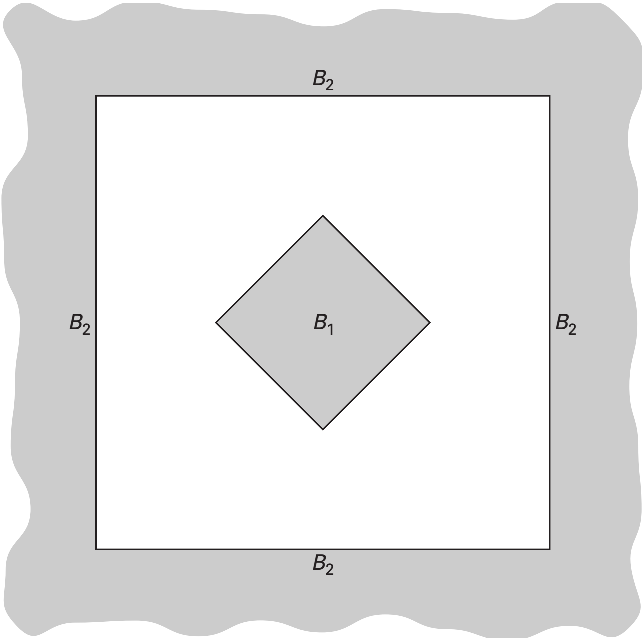
Als je voor enkele waarden van a de baan van P tekent, lijkt deze steeds een deel van een rechte lijn door $(0, 0)$.

5p **13** □ Toon voor $a = 2$ aan dat de baan van P inderdaad een deel van een lijn $y = mx$ is.

Tussen twee vierkanten

In figuur 9 is binnen een groot vierkant een kleiner vierkant getekend. De vierkanten hebben hetzelfde middelpunt en zijn 45° ten opzichte van elkaar gedraaid.
B_1 is het binnengebied van het kleine vierkant, B_2 is het buitengebied van het grote vierkant.

figuur 9



In de figuur op de bijlage is driekwart van de figuur afgedekt.

6p **14** □ Teken in het resterende kwart de conflictlijn van B_1 en B_2. Licht je tekening toe.

Einde