Wiskunde B Profi (oude stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

2001

Tijdvak 1
Woensdag 16 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 91 punten te behalen; het examen bestaat uit 17 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden. Voor de uitwerking van de vragen 1, 2, 12, 13 en 16 is een bijlage toegevoegd.

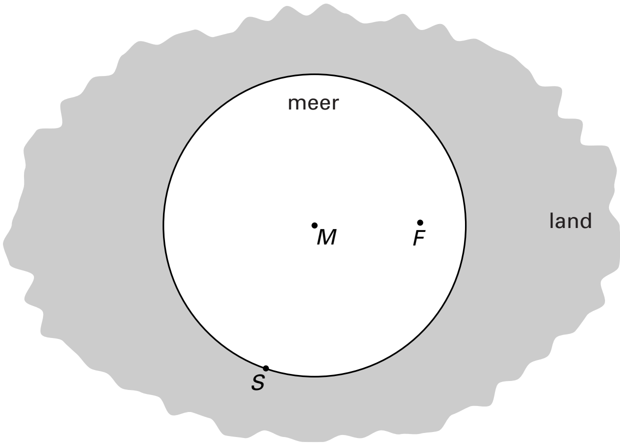
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Boottocht

In een cirkelvormig meer liggen twee eilandjes, M en F. We beschouwen de eilandjes als punten. M ligt precies in het midden van het meer. Zie figuur 1.

figuur 1



S is een punt aan de rand van het meer. Een bootje start in S en vaart in een rechte lijn naar M.

5p **1** □ Teken in de figuur op de bijlage bij vraag 1 het punt P op de route van het bootje waar het bootje even ver van punt S verwijderd is als van F. Licht je werkwijze toe.

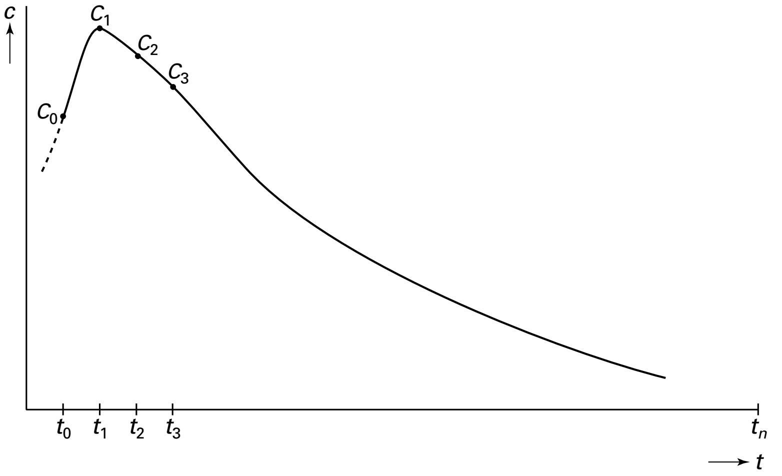
Een ander bootje start in een punt aan de rand van het meer en vaart ook in een rechte lijn naar M. Halverwege is de afstand van het bootje tot het land even groot als de afstand van het bootje tot beide eilandjes.

6p **2** □ Teken in de figuur op de bijlage bij vraag 2 de punten aan de rand van het meer van waaruit het bootje vertrokken kan zijn. Licht je werkwijze toe.

Oppervlaktebenadering

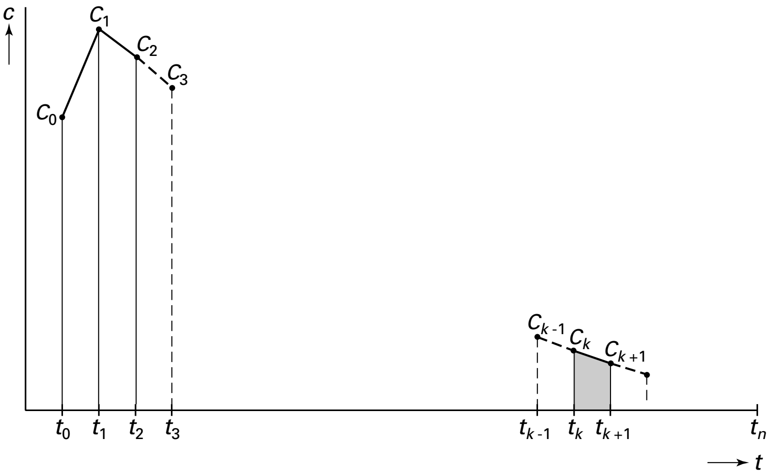
Deze opgave gaat over een voorbeeld uit de farmacokinetiek, de wetenschap die onder andere het verloop bestudeert van de concentratie van een geneesmiddel in het bloed.
In een praktijktest wordt op geregelde tijden met tussenpozen Δt de concentratie van een geneesmiddel bij een persoon gemeten.
Op de tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ is de gemeten concentratie $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$. In figuur 2 zijn de punten $C_k\ (t_k, c_k)$ weergegeven. Deze punten liggen op de kromme die het verloop weergeeft van de concentratie van dit geneesmiddel.
Een maat voor de werkzaamheid van een geneesmiddel is de oppervlakte onder deze kromme. In de farmacokinetiek noemt men dit de AUC (Area Under Curve).

figuur 2



In figuur 3 is aangegeven hoe de oppervlakte onder de kromme benaderd kan worden. Twee opeenvolgende meetpunten bepalen een trapezium. Het trapezium tussen t_k en t_{k+1} is grijs aangegeven. De som van de oppervlakten van alle trapezia is een benadering van de AUC.

figuur 3



De vraag rijst natuurlijk „Hoe nauwkeurig is deze methode?”. Dit gaan we in deze opgave voor een speciaal geval onderzoeken.

3p **3** □ Toon aan dat de oppervlakte van het grijsgemaakte trapezium gelijk is aan $\frac{1}{2}(c_k + c_{k+1})\cdot\Delta t$

4p **4** □ Bewijs dat de AUC tussen t_0 en t_n benaderd wordt door $\left(\frac{1}{2}(c_0 + c_n) + \sum_{p=1}^{n-1} c_p\right)\cdot\Delta t$

Om de nauwkeurigheid van deze manier van benaderen aan de hand van een voorbeeld te testen, nemen we aan dat het dalende gedeelte van de kromme gegeven wordt door $c = 32\cdot e^{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}$ met c in mg/liter en t in uren, $1 \leq t \leq 5$.

5p **5** □ Bewijs met behulp van integraalrekening dat de AUC voor $1 \leq t \leq 5$ gelijk is aan $64 - \frac{64}{e^2}$.

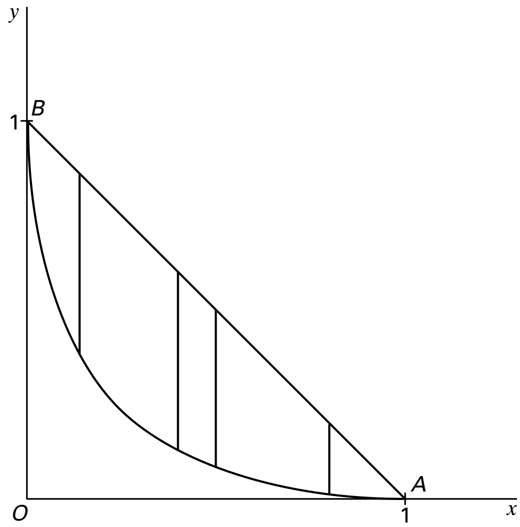
Neem aan dat de concentratie om het half uur gemeten wordt en dat de meetpunten inderdaad op de grafiek van c liggen.

7p **6** □ Bereken hoeveel procent de benadering van de AUC voor $1 \leq t \leq 5$, bepaald met behulp van de formule van vraag 4, afwijkt van de werkelijke oppervlakte. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Machten van sinus en cosinus

Gegeven is de functie $f(x) = (1 - \sqrt{x}\,)^2$ met $0 \le x \le 1$.
Verder is gegeven het lijnstuk AB met $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$. Zie figuur 4.
Tussen de grafiek van f en het lijnstuk AB worden verticale verbindingslijnstukken getekend. In figuur 4 zijn enkele verbindingslijnstukken getekend.

figuur 4



5p **7** □ Toon aan dat de lengte van een verticaal verbindingslijnstuk gegeven wordt door de formule $L = -2x + 2\sqrt{x}$.

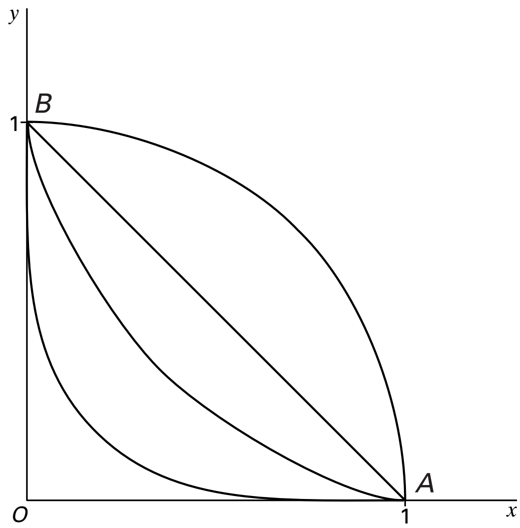
4p **8** □ Bereken exact de maximale lengte van zo'n verbindingslijnstuk.

Voor elk positief geheel getal n bekijken we de baan K_n van een punt dat beweegt volgens

$$\begin{cases} x(t) = \cos^n t \\ y(t) = \sin^n t \end{cases} \qquad \text{met } 0 \le t \le \tfrac{1}{2}\pi.$$

In figuur 5 zijn vier banen getekend.

figuur 5



Gegeven een punt P van K_6.

5p **9** □ Toon aan dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan K_6 in punt P gelijk is aan $-\tan^4 t$.

In een punt P van K_6 heeft de raaklijn aan K_6 richtingscoëfficiënt -9.

3p **10** □ Bereken de coördinaten van P.

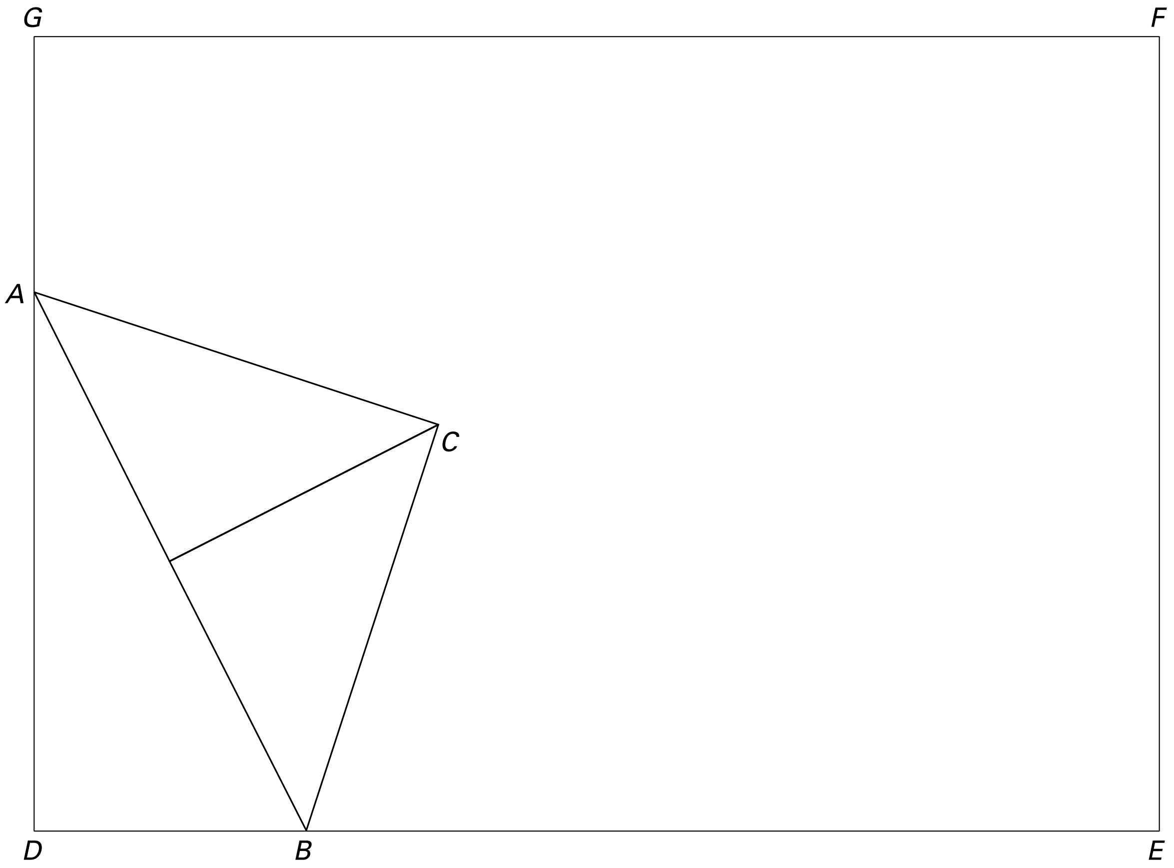
Voor een bepaalde waarde van n liggen de punten van K_n op de grafiek van f en voor een bepaalde waarde van n liggen de punten van K_n op het lijnstuk AB.

6p **11** □ Onderzoek welke twee waarden van n dit zijn en toon met behulp van formules de juistheid van je bewering aan.

Bewegende, gelijkbenige, rechthoekige driehoek

Een gelijkbenige rechthoekige driehoek wordt in de linkeronderhoek van een vel papier gelegd. De eindpunten van de schuine zijde van de driehoek zijn A en B en het derde hoekpunt is C. Punt A ligt op de linkerzijde van het papier en punt B op de onderzijde van het papier. De hoekpunten van het papier noemen we D, E, F en G.
Zie figuur 6.
Figuur 6 is op de bijlage afgedrukt.

figuur 6



We laten de driehoek over het papier bewegen waarbij A op de linkerzijde en B op de onderzijde van het papier blijft. In de beginsituatie valt B samen met D. B beweegt over de onderzijde van het papier tot A samenvalt met D. Tijdens de beweging beschrijft C een baan over het papier.

5p **12** □ Bewijs dat C tijdens deze beweging over de bissectrice van $\angle D$ beweegt. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de bijlage bij vraag 12.

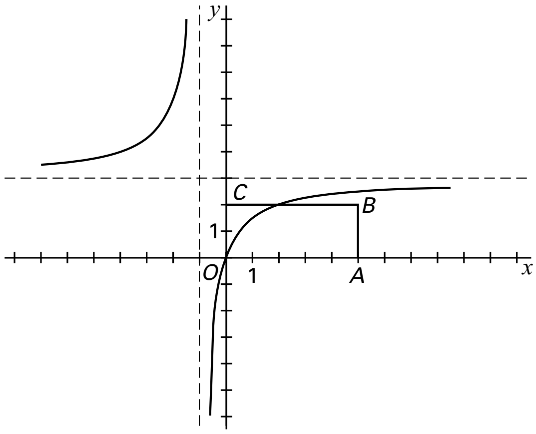
5p **13** □ Teken in de figuur op de bijlage bij vraag 13 de baan die het punt C beschrijft. Licht je antwoord toe.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Een functie en een rij

Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \dfrac{3}{x+1}$. Zie figuur 7.

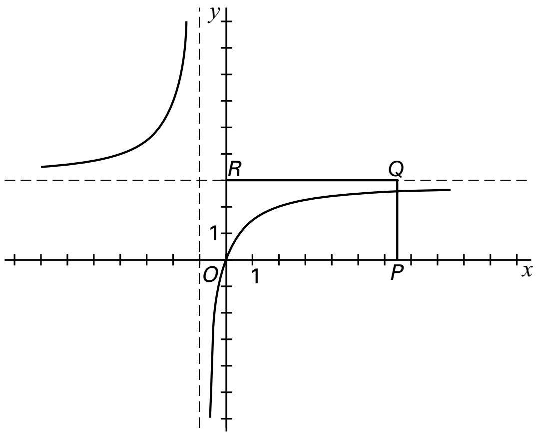
figuur 7



In figuur 7 is rechthoek $OABC$ getekend met $A(5, 0)$ en $C(0, 2)$. De raaklijn in O aan de grafiek van f verdeelt rechthoek $OABC$ in twee delen.

9p **14** □ Bereken exact de verhouding van de oppervlaktes van deze twee delen.

figuur 8



In figuur 8 is rechthoek $OPQR$ getekend met $R(0, 3)$ en $P(b, 0)$ met $b > 0$.
De grafiek van f verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte.

8p **15** □ Bereken b in twee decimalen nauwkeurig.

Voor de rij $v_0, v_1, v_2, \ldots$ geldt $v_n = f(v_{n-1})$ met $v_0 \geq 0$ en $n \geq 1$.

Op de bijlage bij vraag 16 is een gedeelte van de grafiek van f getekend.

6p **16** □ Onderzoek voor welke waarden van v_0 de rij convergeert. Licht je antwoord toe, bijvoorbeeld met behulp van een webgrafiek.

Voor bepaalde startwaarden $v_0 < 0$ breekt de rij $v_0, v_1, v_2, \ldots$ met $v_n = f(v_{n-1})$ en $n \geq 1$ af, omdat de termen niet meer gedefinieerd zijn.

5p **17** □ Geef twee van dergelijke startwaarden. Licht je antwoord toe.

Einde