Wiskunde B Profi

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 00

Tijdvak 2
Woensdag 21 juni
13.30 – 16.30 uur

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 1, 3, 4, 10 en 11 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

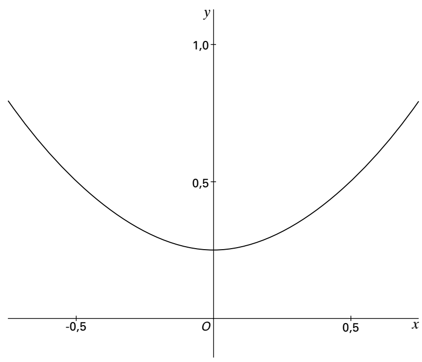
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Met verschillende startwaarden

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ is een rij getallen waarvoor geldt: $a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$
Hiernaast en op de bijlage is de grafiek van $y = \frac{1}{4} + x^2$ getekend.

Neem in de vragen 1 en 2 als startwaarde: $a_1 = 0$.

figuur 1



5p **1** □ Geef in de figuur op de bijlage op de x-as de getallen a_2 en a_3 aan, *zonder* deze getallen te berekenen. Licht je werkwijze toe.

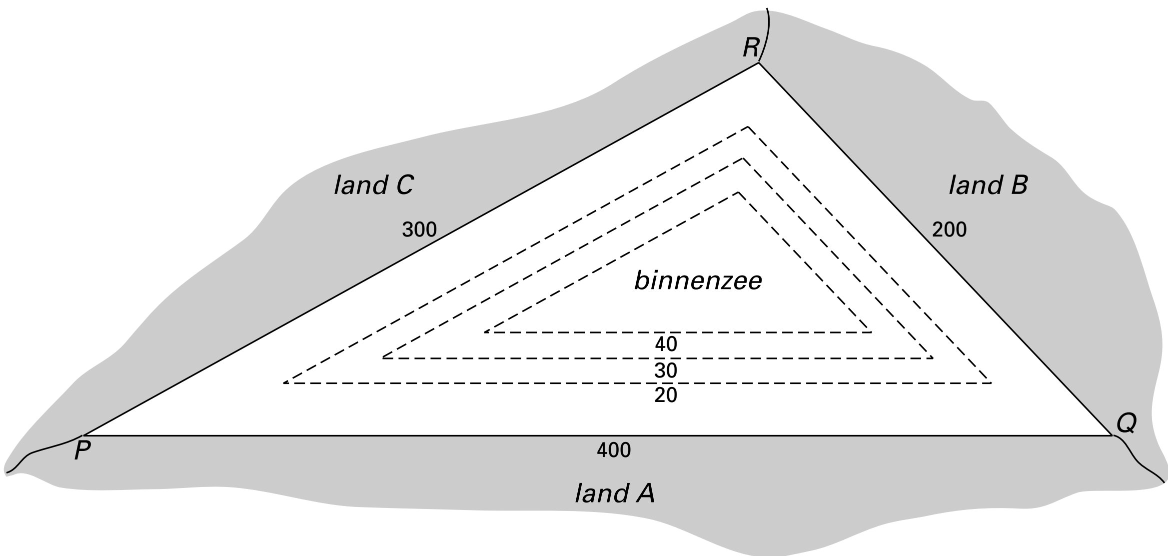
De rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heeft een limiet.
4p **2** □ Bereken de exacte waarde van deze limiet.

In plaats van startwaarde 0 kan voor a_1 ook een andere startwaarde worden gekozen.
5p **3** □ Onderzoek voor welke waarden van a_1 de rij een limiet heeft.
Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de bijlage.

Eerlijk delen

Drie landen, A, B en C, grenzen aan elkaar en aan een binnenzee. De kustlijnen van de drie landen zijn recht. Zie figuur 2. De kustlijn van land A is 400 km lang, de kustlijn van land B 200 km en de kustlijn van land C 300 km. In de binnenzee zijn de iso-afstandslijnen op 20 km, 30 km en 40 km uit de kust getekend.

figuur 2



De punten van de binnenzee die 2 keer zo ver van land B af liggen als van land A, vormen een lijnstuk k. De punten die $1\frac{1}{2}$ keer zo ver van land B af liggen als van land C, vormen een lijnstuk l.

6p **4** □ Teken in de figuur op de bijlage met behulp van de iso-afstandslijnen de lijnstukken k en l. Licht je werkwijze toe.

P, Q en R zijn de hoekpunten van de binnenzee. S is het snijpunt van k en l.
De binnenzee wordt als volgt tussen de landen A, B en C verdeeld: land A krijgt driehoek PQS, land B krijgt driehoek QRS en land C krijgt driehoek RPS.
Noem de afstand van S tot land A: x. Je kunt de oppervlakten van de drie driehoeken uitdrukken in x.

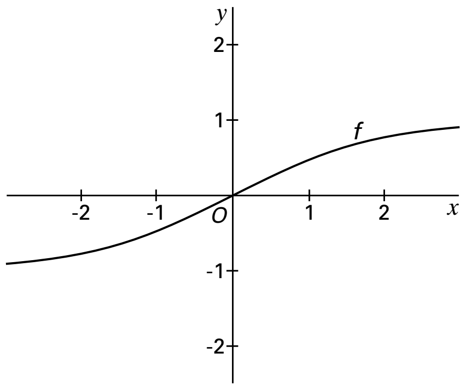
5p **5** □ Bewijs dat de drie landen een even groot deel van de binnenzee krijgen.

Puntsymmetrisch

In figuur 3 staat de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

figuur 3



6p **6** □ Bewijs dat f een stijgende functie is.

4p **7** □ Los op: $0{,}999 < f(x) < 1$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

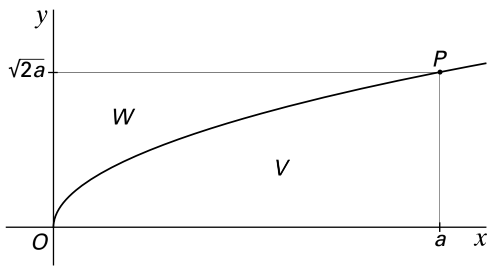
De grafiek van f lijkt puntsymmetrisch te zijn ten opzichte van het punt $(0, 0)$.

6p **8** □ Bewijs langs algebraïsche weg dat inderdaad voor elk getal a geldt: $f(-a) = -f(a)$.

Gelijke inhoud

Op de grafiek van $y = \sqrt{2x}$ ligt een punt $P(a, \sqrt{2a})$, met $a > 0$.
De rechthoek met hoekpunten $O(0, 0)$ en P, waarvan twee zijden langs de assen vallen, wordt door de grafiek verdeeld in de twee stukken V en W. Zie figuur 4.
V wordt gewenteld om de x-as; W wordt gewenteld om de y-as.

figuur 4

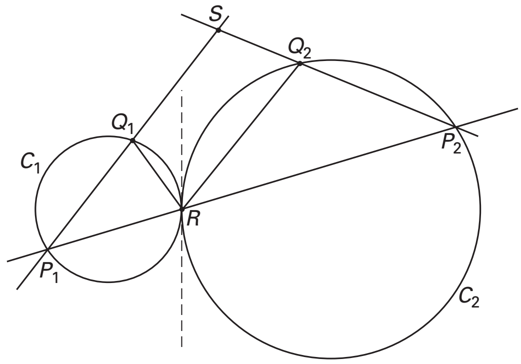


8p **9** □ Bereken de exacte waarde van a waarvoor deze omwentelingslichamen dezelfde inhoud hebben.

Op één cirkel

Twee cirkels C_1 en C_2 raken elkaar in het punt R; ze hebben dus een gemeenschappelijke raaklijn in R.
Een lijn door R snijdt C_1 in het punt P_1 en C_2 in het punt P_2.
Een lijn door P_1 snijdt C_1 in het punt Q_1.
Een lijn door P_2 snijdt C_2 in het punt Q_2.
De lijnen P_1Q_1 en P_2Q_2 snijden elkaar in het punt S.
Zie figuur 5. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 5



8p **10** □ Bewijs dat de punten Q_1, Q_2, S en R op één cirkel liggen.

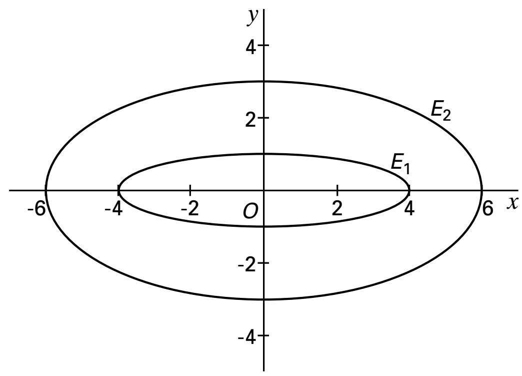
Twee ellipsen

Het punt P beweegt over een ellips E_1 en het punt Q over een ellips E_2 volgens:

$$\begin{cases} x_P = 4\cos t \\ y_P = \sin t \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_Q = 6\cos t \\ y_Q = 3\sin t \end{cases}$$

In figuur 6 en op de bijlage zijn E_1 en E_2 getekend.

figuur 6



Er is een tijdstip t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ waarvoor geldt: $x_Q = x_P + 1$.

5p **11** □ Teken in de figuur op de bijlage het lijnstuk PQ op dit tijdstip. Licht je werkwijze toe.

6p **12** □ Bewijs dat de afstand tussen P en Q op elk tijdstip t hetzelfde is.

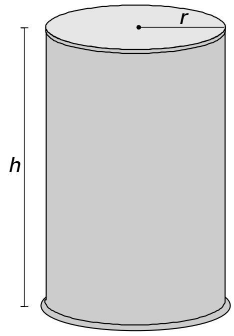
Iemand vraagt zich af of E_2 de iso-afstandslijn op afstand 2 is van het door E_1 omsloten gebied. Als voorbeeld neemt hij op E_2 het punt waar Q op tijdstip 2 is.

4p **13** □ Onderzoek of de afstand van dit punt tot E_1 gelijk aan 2 is.

Voorraadbussen

In een bedrijf worden verschillende cilindervormige voorraadbussen gemaakt. Elke voorraadbus heeft een inhoud van 1 liter. De bodem en de mantel van de cilinder worden gemaakt van blik, het deksel van plastic. De materiaalkosten zijn voor blik 2 cent per dm^2 en voor plastic 1 cent per dm^2.
Omdat de inhoud van elke voorraadbus 1 liter is, kun je de hoogte h (in dm) uitdrukken in de straal r (in dm).
Zie figuur 7.

figuur 7



Voor de materiaalkosten K (in centen) geldt: $K = 3\pi r^2 + \frac{4}{r}$.

6p **14** □ Leid deze formule af.

4p **15** □ Bereken met behulp van je grafische rekenmachine in millimeters nauwkeurig de straal en de hoogte van de voorraadbus waarvoor de materiaalkosten minimaal zijn.

8p **16** □ Bewijs dat voor de voorraadbus waarvoor K minimaal is, geldt: $h = 1\frac{1}{2}r$.

Einde