Wiskunde B Profi

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

19 99

Tijdvak 2
Dinsdag 22 juni
13.30–16.30 uur

Dit examen bestaat uit 15 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 1, 2, 7, 11 en 12 is een bijlage toegevoegd.

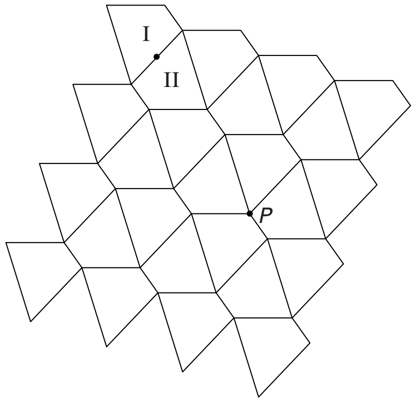
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Opgave 1 Een vlakvulling

Uitgaande van een willekeurige koordenvierhoek kun je een vlakvulling tekenen. In figuur 1 zie je hiervan een voorbeeld.

figuur 1

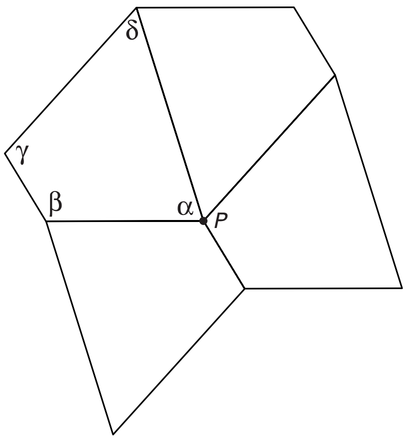


Twee aangrenzende koordenvierhoeken (zoals I en II) gaan in elkaar over door ze een halve slag te draaien om het midden van de gemeenschappelijke zijde (dat midden is aangegeven in de figuur).

Deze opgave gaat over de vlakvulling van figuur 1.

We maken het Voronoi-diagram met de hoekpunten van de vierhoeken als centra. *P* is zo'n hoekpunt. Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 2



5p **1** □ Teken de Voronoi-cel van centrum *P* in de figuur op de bijlage.

Noem de hoeken van een koordenvierhoek: α, β, γ en δ. Zie figuur 2.

6p **2** □ Bewijs dat de hoeken van de Voronoi-cel van centrum *P* dan ook α, β, γ en δ zijn. Je kunt hierbij de figuur op de bijlage gebruiken.

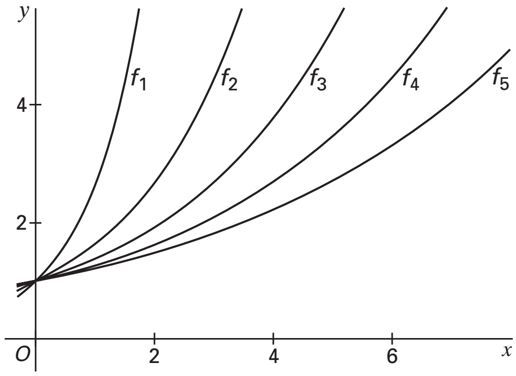
Opgave 2 Een familie exponentiële functies

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is f_n de functie gedefinieerd door $f_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{n}}$.

In figuur 3 zijn de grafieken van f_1 tot en met f_5 getekend.

Voor elke n raakt de lijn met vergelijking $y = \frac{\mathrm{e}}{n} \cdot x$ de grafiek van f_n.

figuur 3



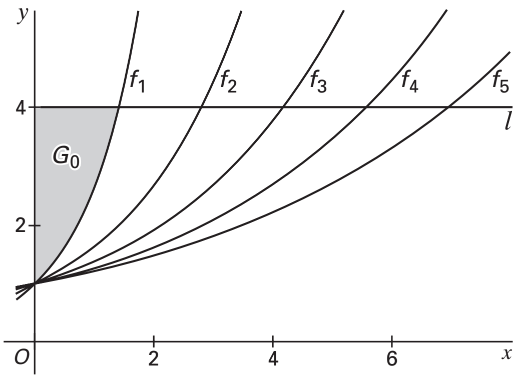
De volgende vraag gaat over deze eigenschap als $n = 2$.

9p **3** □ Bewijs dat de lijn $y = \frac{\mathrm{e}}{2} \cdot x$ raakt aan de grafiek van $f_2(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

l is de lijn met vergelijking $y = 4$.
G_0 is het gebied dat wordt ingesloten door de y-as, de grafiek van f_1 en de lijn l. Zie figuur 4.

7p **4** □ Bereken de exacte waarde van de oppervlakte van G_0.

figuur 4



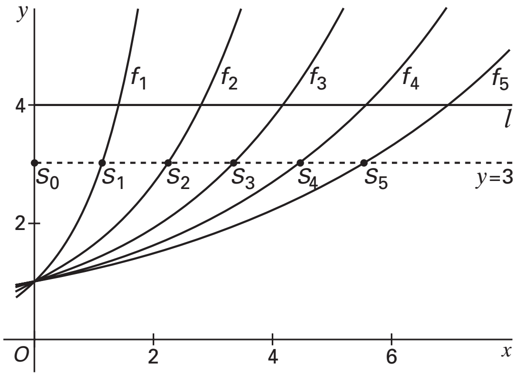
De lijn met vergelijking $y = 3$ snijdt de grafiek van de functie f_n in het punt S_n, en de y-as in het punt S_0. Zie figuur 5.

6p **5** □ Bewijs dat voor elke n het lijnstuk S_nS_{n+1} even lang is als het lijnstuk S_0S_1.

Voor elke n is G_n het gebied dat wordt ingesloten door lijn l en de grafieken van f_n en f_{n+1}.

6p **6** □ Toon aan dat voor alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ de oppervlakten van G_n gelijk zijn.

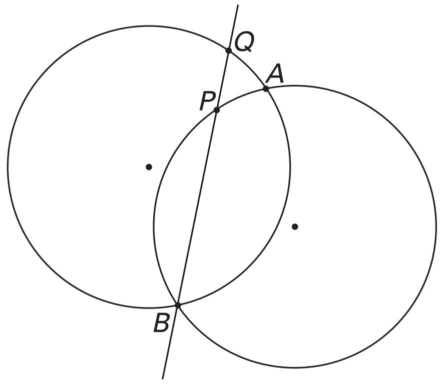
figuur 5



Opgave 3 Twee cirkels met gelijke straal

Twee cirkels met gelijke straal snijden elkaar in de punten A en B. Een lijn door B snijdt de ene cirkel in P en de andere cirkel in Q. Zie figuur 6. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 6

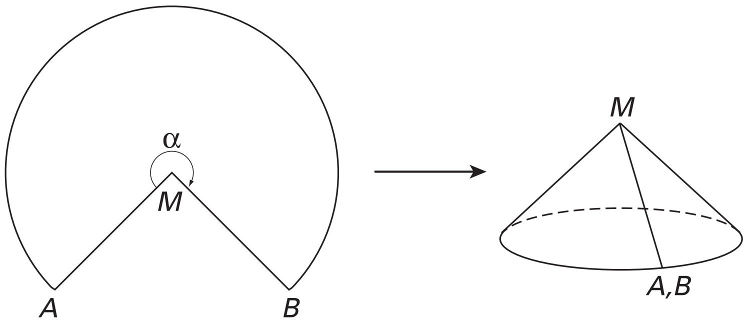


6p **7** □ Bewijs dat de lijnstukken AP en AQ even lang zijn.

Opgave 4 Een kegel vouwen

In figuur 7 is een cirkelvormig stuk papier getekend, waaruit een sector is geknipt. De uiteinden van de cirkelrand van het overgebleven stuk papier zijn A en B.
M is het middelpunt van de cirkel.
Door de kanten AM en BM tegen elkaar te lijmen, ontstaat een kegel.

figuur 7



We noemen de hoek AMB van het overgebleven stuk α, met α in graden. Zie figuur 7.
Als α klein is, ontstaat een smalle, hoge kegel.
Als α daarentegen groot is, ontstaat een platte, lage kegel.

We gaan op zoek naar de kegel die de grootst mogelijke inhoud heeft.

We nemen als straal van het cirkelvormige stuk papier 1.

3p **8** □ Bewijs dat de omtrek van de grondcirkel van de kegel gelijk is aan $\frac{\alpha}{360}\cdot 2\pi$.

De inhoud van een kegel wordt gegeven door de volgende formule:
Inhoud $= \frac{1}{3}\cdot$ oppervlakte grondvlak $\cdot$ hoogte.

5p **9** □ Bewijs dat de inhoud van de kegel gelijk is aan $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\alpha}{360}\right)^2 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{360}\right)^2}$.

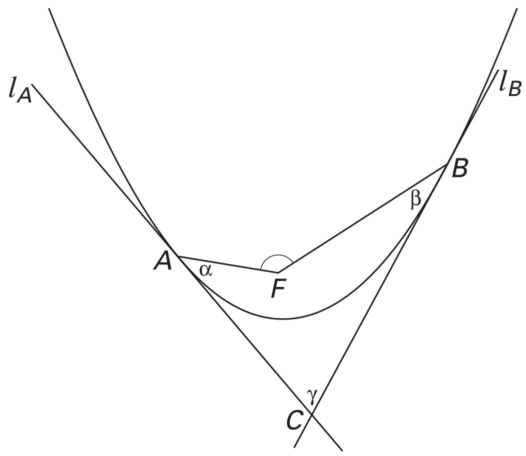
5p **10** □ Voor welke α is de inhoud maximaal? Geef je antwoord in graden nauwkeurig en licht je werkwijze toe.

Opgave 5 Een parabool met twee raaklijnen

In figuur 8 is een parabool getekend met brandpunt F.
A en B zijn twee punten op de parabool aan weerszijden van de symmetrieas.
l_A en l_B zijn de raaklijnen aan de parabool in respectievelijk A en B.

γ is de hoek waaronder l_A en l_B elkaar snijden in C, $\angle CAF = \alpha$ en $\angle CBF = \beta$.
Figuur 8 staat ook twee keer op de bijlage.
Je kunt deze figuren gebruiken bij de beantwoording van de vragen 11 en 12.

figuur 8



6p **11** □ Bewijs dat $\gamma = \alpha + \beta$.

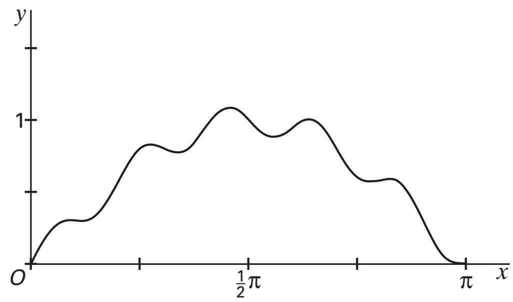
5p **12** □ Bewijs dat $\angle AFB = 2\gamma$.

Opgave 6 Een slingergolf

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is f_n de functie gedefinieerd door $f_n(x) = \sin x + \frac{1}{n} \sin nx$ met domein $[0, \pi]$.

In figuur 9 is in een assenstelsel de grafiek van f_{10} getekend.

figuur 9



Voor elke n zou de grafiek van f_n in dit assenstelsel getekend kunnen worden.
De hoek die de grafiek van f_n in de oorsprong met de x-as maakt, is voor elke n hetzelfde.

5p **13** □ Bewijs dit.

7p **14** □ Onderzoek voor welke waarden van n het maximum van f_n wordt bereikt voor $x = \frac{1}{2}\pi$.
Je hoeft je antwoord niet te bewijzen. Wel moet je je werkwijze toelichten.

Voor elke n ligt de grafiek van f_n op of boven de x-as. De grafiek van f_n 'slingert' om de grafiek van $y = \sin x$.
O_n is de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f_n en de x-as.
O is de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $y = \sin x$ en de x-as op het domein $[0, \pi]$.

9p **15** □ Bewijs dat voor elke n geldt: $O_n \geqq O$.

Einde