Wiskunde B Profi

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

1999

Tijdvak 1
Donderdag 20 mei
13.30–16.30 uur

Dit examen bestaat uit 15 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 1, 2, 8, 12 en 13 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Opgave 1 Burendiagram

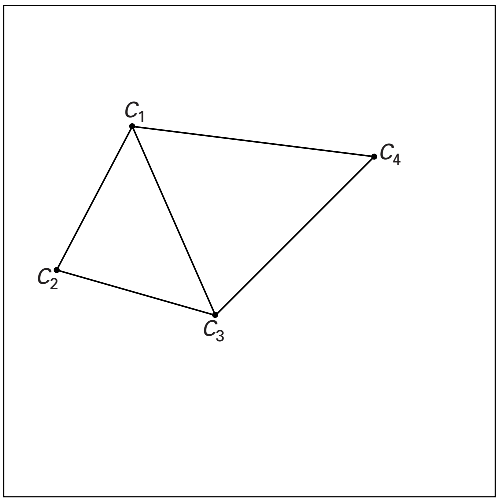
C_1, C_2, C_3 en C_4 zijn de centra van een Voronoi-diagram. Door de centra waarvan de Voronoi-cellen een gemeenschappelijke grenslijn hebben met elkaar te verbinden, ontstaat het burendiagram dat in figuur 1 en op de bijlage is getekend.

5p **1** □ Teken op de bijlage het Voronoi-diagram dat bij de vier centra hoort.

Het burendiagram in figuur 1 bestaat uit twee driehoeken. Door C_3 te verplaatsen, terwijl de andere centra op hun plaats blijven, kan er een burendiagram ontstaan dat bestaat uit een vierhoek $C_1C_2C_3C_4$ (de hoekpunten in deze volgorde).

6p **2** □ Teken in de figuur op de bijlage de plaatsen waar in dat geval C_3 kan komen te liggen. Leg uit waarom dit de juiste plaatsen zijn voor C_3.

figuur 1



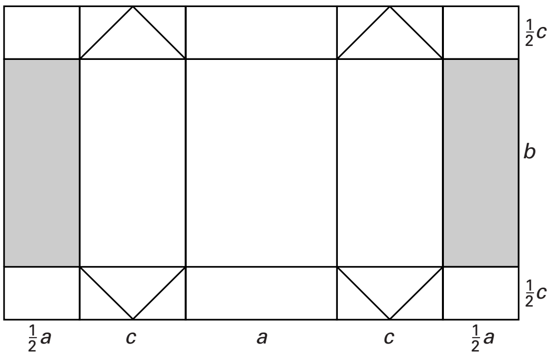
Opgave 2 Tetra Brik

foto's

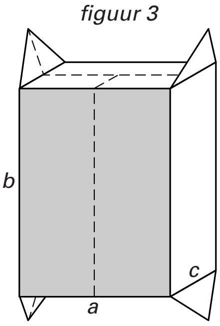
Dranken zoals sinaasappelsap tref je vaak aan in een kartonnen balkvormige verpakking. Tetra Brik is zo'n verpakking. Dit pak wordt gefabriceerd uit een rechthoekig stuk karton. Zie figuur 2. De vouwlijnen zijn er op aangegeven. De grijze stukken worden de achterkant van het pak. De linker- en rechterkant worden aan elkaar gelijmd. De bovenkant en de onderkant worden dichtgelijmd. Zo ontstaat een balk. Zie figuur 3. Aan de vier hoeken zitten driehoekige 'flappen'. De stippellijnen zijn lijmnaden.
In deze opgave nemen we aan dat de lijmnaden geen karton kosten.

figuren 2 en 3

figuur 2



figuur 3



achterkant

De dikte van het pak noemen we c (dm). De andere afmetingen noemen we a en b (dm).
De oppervlakte van het karton waarmee werd begonnen, noemen we O (dm^2).
Voor O geldt dan: $O = (2a + 2c)(b + c)$.
We kijken alleen naar pakken van 1 liter (= 1 dm^3); er geldt dus $a \cdot b \cdot c = 1$.
We willen O minimaliseren. Dat doen we in twee gevallen.

Geval I: De dikte c van het pak is 0,4.

2p **3** □ Toon aan dat hieruit volgt: $b = \dfrac{5}{2a}$.

4p **4** □ Toon aan dat in dit geval geldt: $O = 0{,}8a + \dfrac{2}{a} + 5{,}32$.

5p **5** □ Onderzoek bij welke afmetingen van het pak O minimaal is. Geef die afmetingen in mm nauwkeurig.

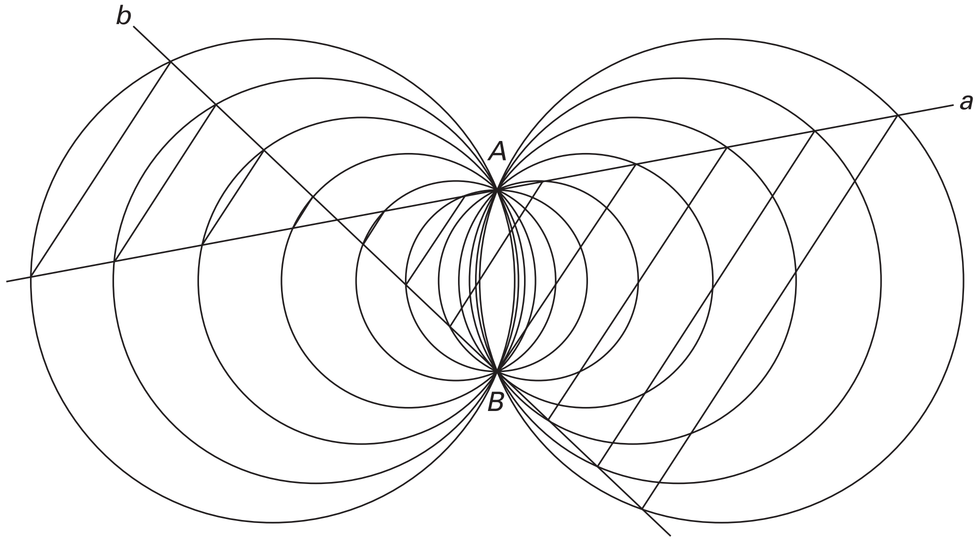
Geval II: De voorkant van het pak is vierkant; dus $a = b$.

4p **6** □ Toon aan dat voor de oppervlakte O van het karton geldt: $O = 2\cdot\left(a + \dfrac{1}{a^2}\right)^2$.

6p **7** □ Bereken de exacte waarde van a waarvoor O minimaal is.

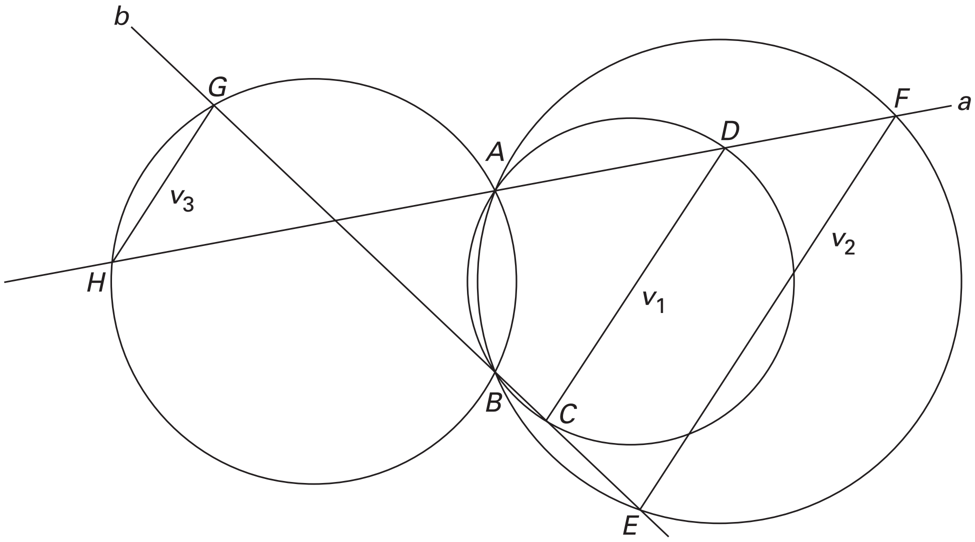
Opgave 3 Evenwijdige koorden in een cirkelbundel

figuur 4



A en B zijn twee punten. In figuur 4 zijn elf exemplaren getekend van de bundel cirkels, die door A en B gaan. a is een lijn door A, b is een lijn door B. Elk van de cirkels wordt door lijn a in nog een ander punt dan A gesneden en door lijn b in nog een ander punt dan B. Deze snijpunten zijn door een koorde verbonden.
In figuur 5 en in de figuur op de bijlage zijn alleen de koorden v_1, v_2 en v_3 getekend met de bijbehorende cirkels.

figuur 5



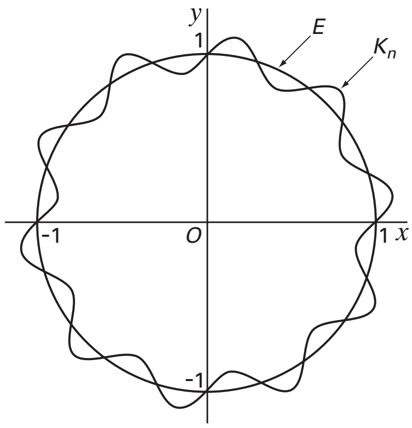
9p **8** □ Bewijs dat v_1, v_2 en v_3 evenwijdig zijn. Je kunt daarbij gebruik maken van de figuren op de bijlage.

Opgave 4 Gegolfde cirkels

Een punt beweegt over een kromme in het Oxy-vlak volgens de formules:
$x = r \cdot \cos t$ en $y = r \cdot \sin t$.

Als $r = 1$, is de kromme de eenheidscirkel E.
Als $r = 1 + \frac{1}{n} \sin nt$, is de kromme een 'gegolfde cirkel' K_n. Hierbij is n een positief geheel getal.

figuur 6



In figuur 6 zijn getekend:

$$E: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

en voor een zekere waarde van n

$$K_n: \begin{cases} x = (1 + \frac{1}{n} \sin nt) \cdot \cos t \\ y = (1 + \frac{1}{n} \sin nt) \cdot \sin t \end{cases}$$

5p **9** □ Hoe groot is die waarde van n? Laat zien hoe je je antwoord gevonden hebt.

9p **10** □ Bereken de hoek waaronder K_{1999} en E elkaar in $(1, 0)$ snijden.

Voor elke n kunnen we de gegolfde cirkel K_n inklemmen tussen twee cirkels met middelpunt $(0, 0)$: de kleinste cirkel die om K_n past en de grootste cirkel die binnen K_n past. Zodoende ligt K_n in een ringvormig gebied.

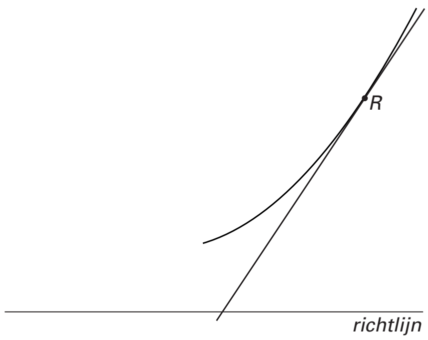
7p **11** □ Toon aan dat de oppervlakte van het ringvormige gebied gelijk is aan $\dfrac{4\pi}{n}$.

Opgave 5 Een raaklijn aan een parabool

In figuur 7 is een stukje van een parabool getekend. Bovendien is de richtlijn van de parabool getekend. En in een punt R van de parabool is de raaklijn getekend.
Figuur 7 staat ook op de bijlage.

6p **12** □ Teken in de figuur op de bijlage de plaats van het brandpunt F van de parabool. Licht je werkwijze toe.

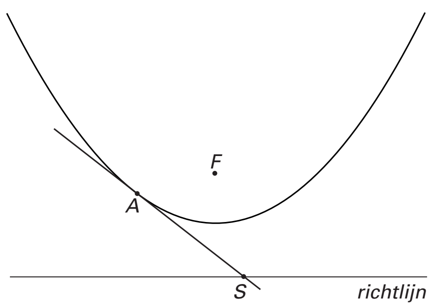
figuur 7



In figuur 8 is een parabool getekend met zijn brandpunt F en zijn richtlijn. A is een punt van de parabool. De raaklijn in A aan de parabool snijdt de richtlijn in S.
Figuur 8 staat ook op de bijlage.

7p **13** □ Bewijs met behulp van gelijke (congruente) driehoeken dat $\angle SFA = 90^\circ$. Je kunt hierbij de figuur op de bijlage gebruiken.

figuur 8



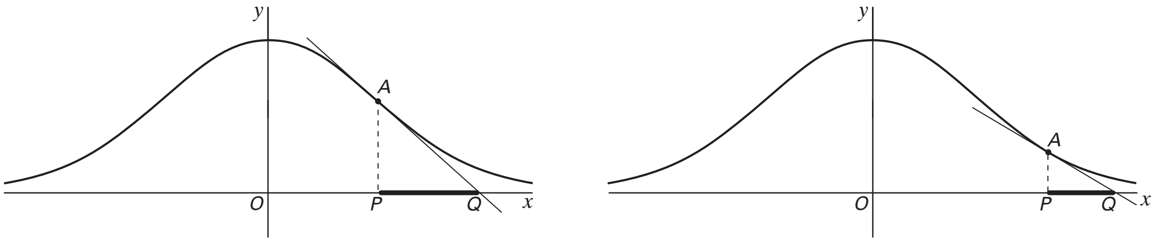
Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Opgave 6 Een normale kromme

In de statistiek speelt de functie $f(x) = e^{-x^2}$ een belangrijke rol. De grafiek van deze functie is een zogenaamde *normale kromme.*
A is een punt van de grafiek met positieve x-coördinaat a. P is de projectie van A op de x-as. Q is het snijpunt van de raaklijn in A aan de grafiek van f met de x-as.

In figuur 9 is de situatie getekend voor twee verschillende plaatsen van punt A.

figuur 9

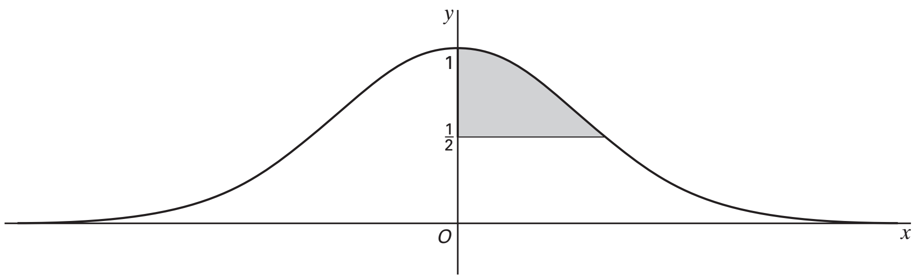


De lengte van PQ verandert als punt A over de grafiek beweegt: de lengte van PQ is een functie van a.

9p **14** □ Toon aan dat bij toenemende a de lengte van PQ steeds kleiner wordt.

In figuur 10 is een vlakdeel aangegeven dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = \frac{1}{2}$.

figuur 10



Dit vlakdeel wordt gewenteld om de y-as .

6p **15** □ Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Einde