Wiskunde B

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

19 99

Tijdvak 2
Dinsdag 22 juni
13.30 – 16.30 uur

Dit examen bestaat uit 14 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van opgave 4 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

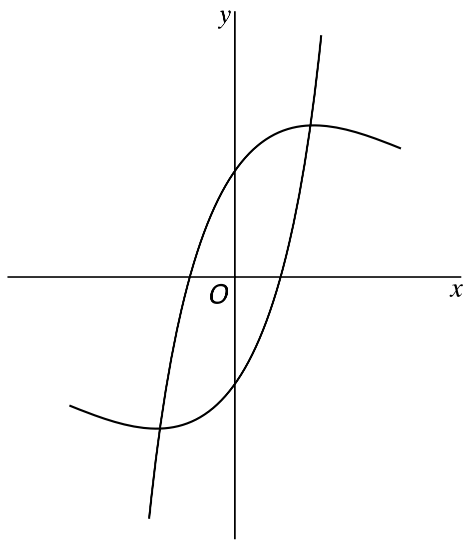
Opgave 1

De kromme K is gegeven door

$$x = t - \frac{2}{t} \text{ en } y = t^3 - 3t$$

In figuur 1 is een gedeelte van K getekend.

figuur 1



4p **1** □ Bereken de coördinaten van de snijpunten van K met de coördinaatassen.

6p **2** □ Toon aan dat K symmetrisch is ten opzichte van $O(0, 0)$.

K heeft een asymptoot.
3p **3** □ Stel een vergelijking op van die asymptoot; licht het antwoord toe.

Er zijn punten van K die een raaklijn aan K hebben evenwijdig aan de x-as.
8p **4** □ Bereken de coördinaten van die punten en bewijs dat K in die punten zichzelf snijdt.

7p **5** □ Bereken de waarden van p waarvoor de lijn $y = 1\frac{1}{2}x + p$ raaklijn is aan K.

Opgave 2

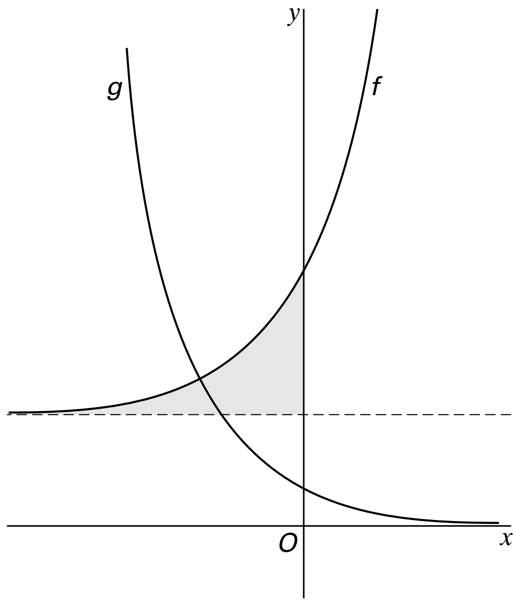
Met domein $\mathbb{R}$ zijn de functies f en g gegeven door

$$f: x \rightarrow 3 + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \text{ en}$$

$$g: x \rightarrow e^{-\frac{1}{2}x}$$

In figuur 2 zijn de grafieken van f en g getekend.

figuur 2



De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
5p **6** □ Bewijs dat de raaklijn in A aan de grafiek van f loodrecht staat op de raaklijn in B aan de grafiek van g.

7p **7** □ Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.

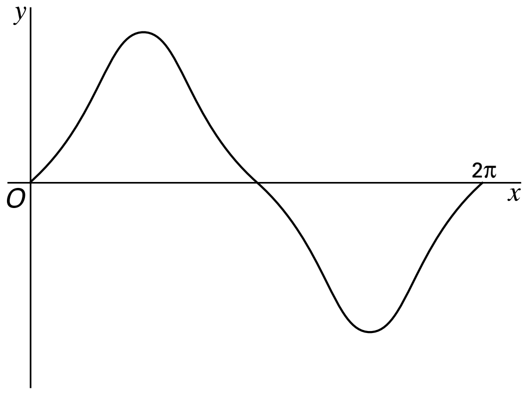
V is het open vlakdeel begrensd door de grafiek van f, de asymptoot van f en de y-as.
V is in figuur 2 aangegeven met een grijze tint.
6p **8** □ Bereken de oppervlakte van V.

Opgave 3

Met domein $[0, 2\pi]$ is de functie f gegeven door $f : x \to \dfrac{2 \sin x}{\cos^2 x + 1}$

In figuur 3 is de grafiek van f getekend.

figuur 3



8p **9** □ Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

6p **10** □ Bereken de oppervlakte van één van de vlakdelen ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

Verder is met domein $[0, 2\pi] \setminus \{\frac{1}{2}\pi,\ 1\frac{1}{2}\pi\}$ de functie g gegeven door $g(x) = \frac{4}{5}\tan x$

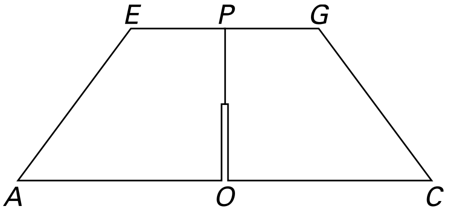
8p **11** □ Bereken de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de grafieken van f en g.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Opgave 4

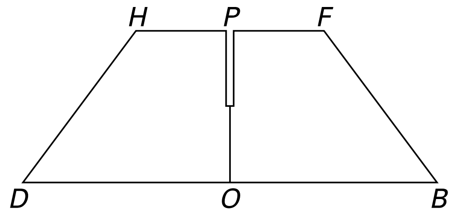
In figuur 4 is een kartonnen kaartje $ACGE$ in de vorm van een gelijkbenig trapezium getekend. De symmetrie-as OP is tot halverwege ingeknipt. $OA = 11$, $EP = 5$ en $OP = 8$.

figuur 4



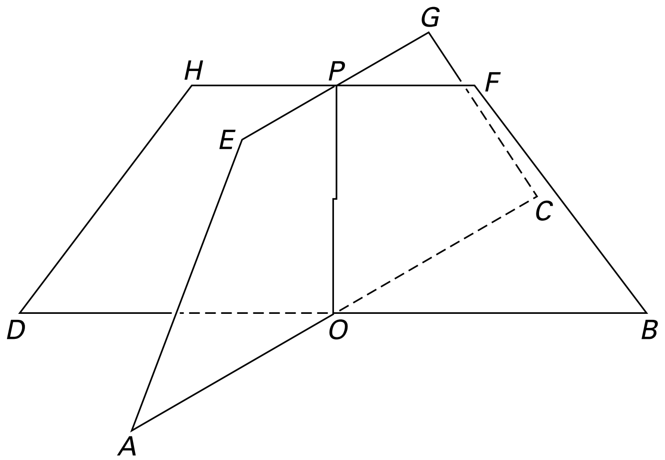
In figuur 5 is een tweede kaartje $BDHF$ van dezelfde vorm en grootte getekend. OP is nu van de andere kant ingeknipt.

figuur 5



De kaartjes worden in elkaar geschoven (zie figuur 6).

figuur 6



De dikte van de kaartjes is verwaarloosbaar. Noem $\angle AOB = \alpha$, waarbij $0 < \alpha < 180°$.

8p **12** □ Bewijs dat er een bol door de punten A, B, C, D, E, F, G en H bestaat die onafhankelijk is van de keuze van α, en bereken de straal van die bol.

De lijnen AE, BF, CG en DH snijden elkaar in het punt T.
T, A, B, C en D zijn de hoekpunten van een vierzijdige piramide.
In de figuur op de bijlage zijn zowel zo'n piramide $T.ABCD$ als de cirkel door A, B, C en D afgebeeld. De kegel K heeft T als top en deze cirkel als grondcirkel.
Q is een punt van lijnstuk CD en R is een punt van lijnstuk PF.
De lijn QR snijdt de kegel K in een punt dat boven vlak $ABCD$ ligt.

7p **13** □ Teken dat punt in de figuur op de bijlage.

De afstand van de lijnen AB en EF noemen we d. Deze hangt af van α.

7p **14** □ Bereken α als $d = 9$; geef het antwoord in graden nauwkeurig.

Einde