

Examen VWO

2014

tijdvak 2
woensdag 18 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 85 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

| naam van de regel | functie | afgeleide |
|-------------------|----------------------------|--|
| somregel | $s(x) = f(x) + g(x)$ | $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ |
| productregel | $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ | $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ |
| quotiëntregel | $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ | $q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| kettingregel | $k(x) = f(g(x))$ | $k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ |

Logaritmen

| regel | voorwaarde |
|---|---|
| ${}^g \log a + {}^g \log b = {}^g \log ab$ | $g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$ |
| ${}^g \log a - {}^g \log b = {}^g \log \frac{a}{b}$ | $g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$ |
| ${}^g \log a^p = p \cdot {}^g \log a$ | $g > 0, g \neq 1, a > 0$ |
| ${}^g \log a = \frac{p \log a}{p \log g}$ | $g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$ |

Wikipedia

Wikipedia is een internationale internet-encyclopedie. In maart 2012 bevatte de Nederlandstalige editie ruim één miljoen artikelen. In de tabel staan gegevens van 2012.

tabel

| | | | | | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| datum | 22 maart | 29 maart | 5 april | 12 april | 19 april |
| aantal | 1 033 414 | 1 034 660 | 1 035 882 | 1 037 184 | 1 038 340 |

Zoals in bovenstaande tabel te zien is, groeit het aantal artikelen flink. Sommigen beweren dat hier sprake is van lineaire groei, anderen houden het op exponentiële groei.

4p 1 Onderzoek elk van deze beweringen.

Over een langere periode bleek de groei sterker te worden: in de 23 weken van 19 april tot 27 september 2012 groeide de Nederlandstalige Wikipedia uit tot 1 120 987 artikelen.

Neem aan dat het aantal artikelen vanaf 19 april exponentieel groeide en in de toekomst met dezelfde factor blijft groeien.

4p 2 Bereken het aantal artikelen op 19 april 2014.

De relatief grote omvang van de Nederlandstalige Wikipedia is voor een deel te verklaren door het grote aantal door computers gegenereerde artikelen. Het zijn wel echte artikelen maar ze zijn erg kort en geven informatie die niet bijzonder interessant is. Een voorbeeld van zo'n artikel:

Miedzianów

Miedzianów is een dorp in de Poolse woiwodschap Groot-Polen. De plaats maakt deel uit van de gemeente Nowe Skalmierzyce en telt 200 inwoners.

Het valt niet op dat er zo veel van deze artikelen zijn. Alleen door in het beginscherm van Wikipedia een willekeurige pagina te vragen, komen deze 'computerartikelen' tevoorschijn.

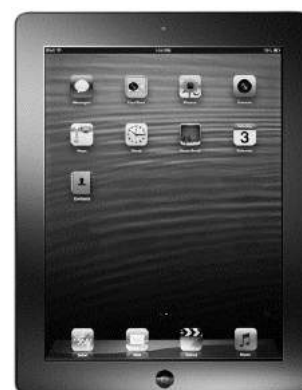
In januari 2013 werd vastgesteld dat een derde deel van alle artikelen door computers gegenereerd was. Het aantal gewone artikelen groeide op dat moment exponentieel met een jaarlijkse toename van 5%. Het aantal computerartikelen groeide echter jaarlijks met 17%. Veronderstel dat de groei van beide soorten artikelen zich de jaren erna op dezelfde wijze voortzet.

- 5p **3** Bereken na hoeveel jaar er meer computergegeneerde artikelen zullen zijn dan gewone artikelen. Geef je antwoord in maanden nauwkeurig.

Touchscreens

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. Op de foto zie je een touchscreen met een menu bestaande uit 13 knoppen.

foto



De tijd die je nodig hebt om in een menu de juiste knop te vinden, hangt mede af van het aantal knoppen in het menu.

Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule:

$$T(n) = b \cdot \ln(n + 1)$$

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal knoppen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.

In deze opgave kijken we naar dit model van Hick.

Om de juiste knop te vinden op het touchscreen van de foto heeft Irene 8 seconden nodig.

3p **4** Bereken haar waarde van b in twee decimalen nauwkeurig.

Pim is veel handiger met een touchscreen dan zijn vader. Hij kan in een menu met 16 knoppen even snel de juiste knop vinden als zijn vader in een menu met 4 knoppen. Dit betekent dat zijn b -waarde (b_p) kleiner is dan de b -waarde van zijn vader (b_v).

4p **5** Onderzoek of dit betekent dat de b -waarde van Pim precies half zo groot is als die van zijn vader.

Sommige gebruikers vinden een menu met veel knoppen onoverzichtelijk. Daarom deelt men een menu soms op in submenu's met minder knoppen. Als er bijvoorbeeld in totaal 18 knoppen zijn, kan de ontwerper ervoor kiezen om:

methode I één menu van 18 knoppen te maken

of

methode II een menu met 3 knoppen te maken, waarbij na elk van de 3 mogelijke keuzes weer een submenu met 6 knoppen verschijnt.

De gebruiker wint hiermee overzichtelijkheid want hij weet nu precies in welk submenu hij moet zoeken, maar hij verliest tijd omdat hij twee keer (in een menu) de juiste knop moet zien te vinden.

Als $b = 1,4$ duurt het keuzeprocess bij methode II minstens 0,5 seconde langer dan bij methode I.

3p **6** Toon met behulp van de formule voor $T(n)$ aan dat dit juist is.

Uit de formule volgt dat één menu met alle knoppen altijd sneller werkt dan een opdeling in submenu's. Dus: één menu met $p \cdot q$ knoppen is altijd sneller dan een hoofdmenu met p knoppen gevolgd door p submenu's met elk q knoppen.

4p **7** Neem $b = 1$ en toon aan dat $T(p) + T(q)$ altijd groter is dan $T(p \cdot q)$.

Wind mee, wind tegen

Op de site buienradar.nl kun je verschillende weerkaarten bekijken. De kaarten bevatten actuele weergegevens zoals temperatuur, windkracht en windrichting. In de figuur hiernaast zie je de windkaart van Nederland op maandag 11 maart 2013 om 20:40 uur. Deze kaart is gebaseerd op gegevens van KNMI-meetstations die over Nederland zijn verspreid. Deze meetstations geven elke 10 minuten een nieuwe waarneming af.

In Nederland zijn er 53 officiële KNMI-meetstations.

- 2p **8** Bereken hoeveel waarnemingen er elke dag in totaal door de officiële meetstations aan het KNMI worden doorgegeven.

Als je in de ochtend van huis naar school fietst en in de middag terugfietst, kan de wind invloed hebben op je totale reistijd. Hoe dat zit, onderzoeken we in de rest van deze opgave.

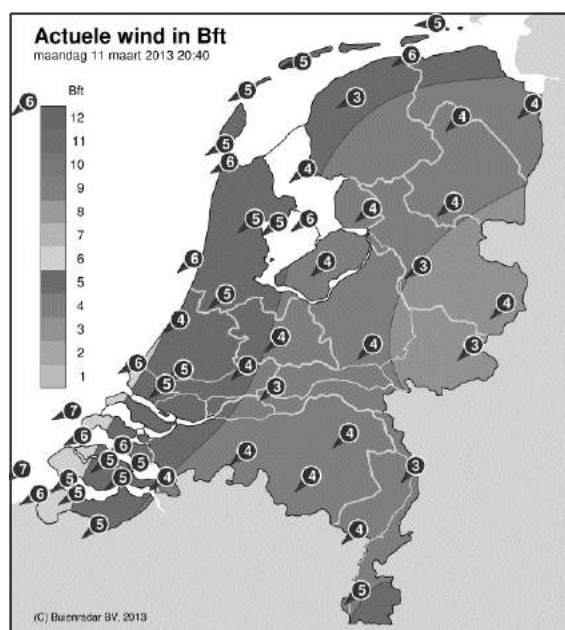
Sylvia woont 10 km van school. Zij fietst elke schooldag. We gaan ervan uit dat als er geen wind is, haar snelheid constant 20 km/u is. Haar totale reistijd is op zo'n schooldag dus 1 uur.

Meestal waait het echter. We veronderstellen dat Sylvia altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg en dat de wind de hele dag constant is. Dan is Sylvia's snelheid op de heenweg $20 + w$ km/u en op de terugweg $20 - w$ km/u. Hierbij geldt $0 \leq w < 20$.

Op een dag geldt $w = 5$. Sylvia's totale reistijd is die dag langer dan 1 uur.

- 4p **9** Bereken hoeveel minuten haar totale reistijd die dag langer is dan 1 uur.

figuur



Sylvia's totale reistijd T in uren wordt gegeven door de formule:

$$T = \frac{400}{400 - w^2}$$

De formule voor T kan worden gevonden door een formule voor de reistijd voor de heenweg en een formule voor de reistijd voor de terugweg op te stellen en deze formules bij elkaar op te tellen.

- 5p **10** Stel deze formules op en toon daarmee aan dat de bovenstaande formule voor T juist is.

Op een dag is Sylvia's totale reistijd 1 uur en 20 minuten.

- 3p **11** Bereken de waarde van w op die dag.

Met de formule voor Sylvia's totale reistijd kun je zonder te rekenen beredeneren dat haar totale reistijd op een dag met wind groter is dan op een dag zonder wind.

- 3p **12** Geef zo'n redenering.

Dat de totale reistijd toeneemt als w toeneemt, kun je ook aantonen met behulp van de afgeleide van T .

- 5p **13** Stel een formule op voor de afgeleide van T en toon daarmee aan dat de totale reistijd toeneemt als w toeneemt.

Muziek op cd's

Om muziek digitaal op een cd op te slaan worden geluidstrillingen omgezet in getallen. Elk getal wordt vervolgens weergegeven als een rijtje nullen en enen.

Een rijtje van acht bits, dus acht keer een 0 of een 1, heet een byte. Het getal 18 bijvoorbeeld wordt daarbij weergegeven als 00010010.

- 3p **14** Bereken hoeveel verschillende rijtjes van 8 bits er mogelijk zijn.

Voor veel muziek is het gebruikelijk om een seconde muziek vast te leggen in 44 100 rijtjes van 16 bits (van 2 bytes dus). Voor stereomuziek wordt het aantal rijtjes nog verdubbeld omdat er zowel voor de linker- als voor de rechterluidspreker een rijtje wordt vastgelegd.

De opslagcapaciteit van een cd is 783 megabyte (MB), waarbij we ervan uitgaan dat 1 megabyte 1 000 000 bytes is.

- 4p **15** Bereken hoeveel minuten stereomuziek in theorie op een cd kan worden opgeslagen.

Om rijtjes van 8 bits op een cd te zetten, vormt men elk rijtje van 8 bits om tot een code van 14 bits. Dit vermindert de foutgevoeligheid. Een voorbeeld van zo'n code van 14 bits is 10010010000000.

Aan deze codes wordt de eis gesteld dat tussen twee enen minstens twee nullen staan. Een code als 00101000000100 kan dus niet als code voorkomen omdat er tussen de eerste twee enen slechts één nul staat.

Door deze eis kan een code maximaal vijf enen bevatten.

- 3p **16** Leg uit waarom een code **niet** zes enen kan bevatten.

De verkoop van cd's is de laatste jaren sterk aan het dalen. Een belangrijke reden van deze terugloop is de mogelijkheid om muziek te downloaden van het internet.

We zoeken een model waarmee we de toekomstige downloadverkoop kunnen beschrijven. Een model dat redelijk past bij de gegevens tot nu toe wordt gegeven door de onderstaande formule:

$$D(n) = \frac{19,0}{1 + 26,14 \cdot 0,73^n}$$

Hierin is $D(n)$ het aantal downloadverkopen in miljoenen in jaar n , met $n=0$ is het jaar 2008. De afgeleide van $D(n)$ wordt gegeven door de formule:

$$D'(n) = \frac{156,3 \cdot 0,73^n}{(1 + 26,14 \cdot 0,73^n)^2}$$

- 3p 17 Beredeneer aan de hand van deze formule van de afgeleide dat de downloadverkoop inderdaad stijgt.

Een model dat de toekomstige cd-verkoop beschrijft is het volgende:

$$\begin{cases} C(n) = 0,91 \cdot C(n-1) \\ C(0) = 18,0 \end{cases}$$

Hierbij is $C(n)$ het aantal verkochte cd's in miljoenen in jaar n , met $n = 1$ is het jaar 2009. Dus er zijn 18 miljoen cd's verkocht in 2008.

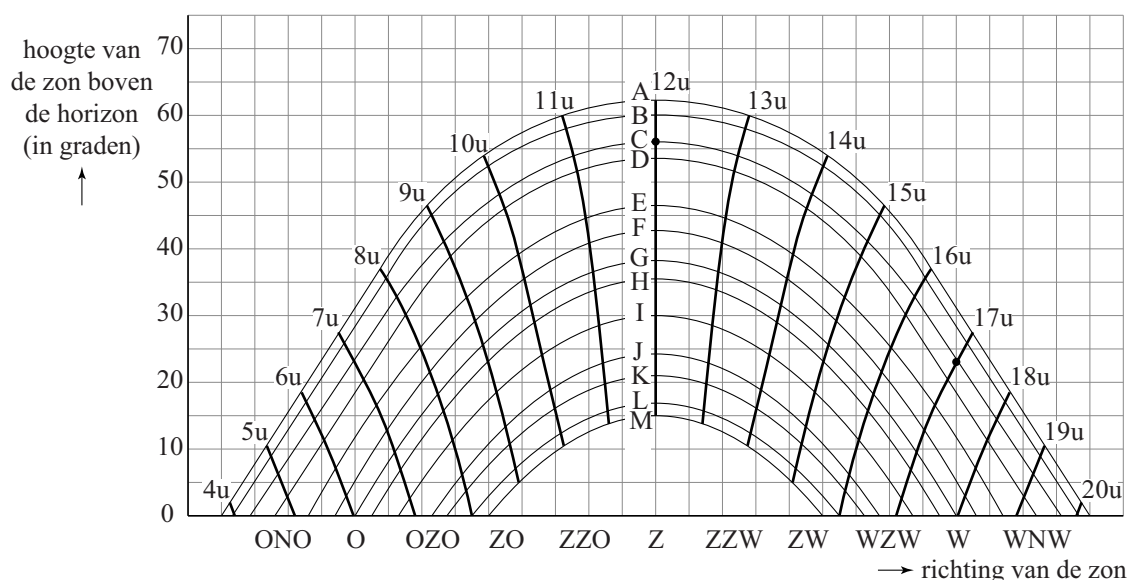
- 5p 18 Bepaal in welk jaar het aantal verkochte cd's voor het eerst kleiner is dan het aantal downloadverkopen.

Zonnebanen

Hoe hoog staat de zon aan de hemel en in welke richting zien we de zon? Om dat te onderzoeken zijn grafische voorstellingen van de zogeheten zonnebanen aan de hemel een handig hulpmiddel. Voor elke dag van het jaar kun je een zonnebaan tekenen. In figuur 1 is dit voor 24 dagen gedaan.

In de figuur is in baan C met een stip aangegeven dat de zon om 12 uur precies in het Zuiden (Z) staat, 56° boven de horizon. Ook is aangegeven dat in baan C de zon om 17 uur precies in het Westen (W) staat, 23° boven de horizon. De letters in de figuur staan ook in de tabel en horen bij de data in de tabel. Zo kun je zien dat op 13 mei en op 1 augustus de zon baan C volgt. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 1



tabel

| zonnebanen 52° N.B. | |
|----------------------------|-----------------------------------|
| A | 22 juni |
| B | 1 juni 12 juli |
| C | 13 mei 1 augustus |
| D | 1 mei 13 augustus |
| E | 12 april 1 september |
| F | 1 april 12 september |
| G | 21 maart 23 september |
| H | 14 maart 1 oktober |
| I | 1 maart 14 oktober |
| J | 11 februari 1 november |
| K | 1 februari 11 november |
| L | 12 januari 1 december |
| M | 22 december |

- 3p 19 Onderzoek met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage op welke dagen van het jaar de zon 's ochtends om 8 uur al 30° of hoger boven de horizon staat.

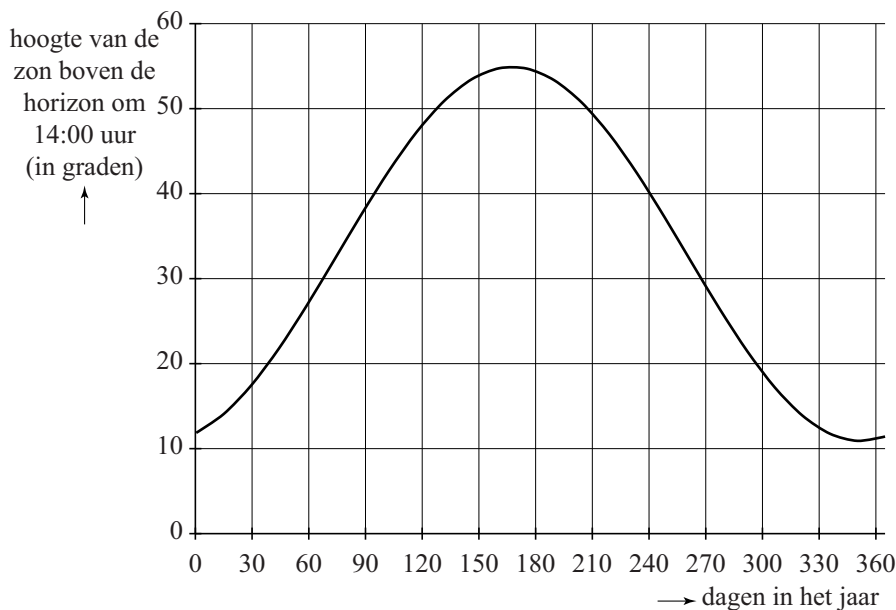
In figuur 1 kun je zien dat de zon elke dag om 12 uur 's middags zijn hoogste stand van die dag bereikt¹⁾. Uit figuur 1 blijkt ook dat die hoogste stand door het jaar heen varieert. Op de uitwerkbijlage zie je een tabel met vijf zonnebanen en de hoogte van de zon boven de horizon om 12:00 uur in graden. Ook zie je een assenstelsel met langs de horizontale as de dagen in het jaar en langs de verticale as de hoogte van de zon boven de horizon in graden.

- 3p **20** Vul op de uitwerkbijlage de tabel verder in en teken de punten uit de tabel in het assenstelsel.

De zonnebanen zijn geen sinusoiden. De grafiek van het verband tussen de stand van de zon op een vast tijdstip op een bepaalde dag en het nummer van die dag in het jaar is wel bij benadering een sinusoïde.

In figuur 2 staat de sinusoïde die een benadering is van het verband tussen de hoogte van de zon boven de horizon om 14:00 uur op een bepaalde dag en de tijd t in dagen in het jaar. Hierbij is $t = 0$ op 1 januari genomen. De figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2



- 5p **21** Stel op basis van figuur 2 een formule op voor het verband tussen de hoogte H van de zon om 14:00 uur op een bepaalde dag en de tijd t in dagen in het jaar. Licht je antwoord toe.

noot 1 De tijden in de figuur zijn tijden in zogenoemde ware zonnetijd. Deze tijd verschilt van de tijd die we in het dagelijks leven gebruiken. De ware zonnetijd kent geen zomer- of wintertijd. In deze opgave gebruiken we alleen de tijd zoals aangegeven in de figuur.

Eerste Kamerverkiezingen

In Nederland worden de leden van de Eerste Kamer gekozen door de leden van de Provinciale Staten (PS). De leden (van de PS) stemmen in principe op hun eigen partij, maar het kan strategisch handig zijn om op een andere partij te stemmen.

Niet iedere provincie heeft evenveel zetels in de PS. De zetelverdeling van de PS (na de verkiezingen van 2 maart 2011) staat in de tabel hieronder. In de tabel kun je zien dat de PvdA in Groningen 12 zetels had behaald en dus 12 leden had in de PS van Groningen.

Afhankelijk van het aantal inwoners in de provincie krijgen de leden van de PS een stemwaarde bij de verkiezingen van de Eerste Kamer. In de laatste kolom van de tabel is te zien dat de stem van een Statenlid uit Groningen bij deze verkiezingen telde voor 135 punten. Dat betekent dat de partij waarop dit Statenlid stemt 135 punten krijgt door deze stem.

tabel

| provincie | aantallen zetels per partij | | | | | | | | | | | | | | stemwaarde | |
|---------------|-----------------------------|-----|-----|-----|----|-----|----|----|------|-----|-----|-----|-----|-----|------------|------|
| | PvdA | VVD | CDA | PVV | SP | D66 | GL | CU | Pvvd | 50+ | SGP | FNP | ONH | PvZ | | Pvhn |
| Groningen | 12 | 6 | 5 | 3 | 6 | 3 | 3 | 3 | 1 | | | | | | 1 | 135 |
| Fryslân | 11 | 6 | 8 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | | | | 4 | | | | 151 |
| Drenthe | 12 | 9 | 6 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | | | | | | | | 120 |
| Overijssel | 9 | 8 | 11 | 4 | 4 | 3 | 2 | 3 | | 1 | 2 | | | | | 241 |
| Flevoland | 6 | 9 | 4 | 6 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | | | | | 101 |
| Gelderland | 9 | 11 | 9 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 1 | 1 | 2 | | | | | 365 |
| Utrecht | 7 | 11 | 6 | 5 | 4 | 5 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | | | | | 261 |
| Noord-Holland | 11 | 13 | 5 | 6 | 5 | 6 | 5 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | | 489 |
| Zuid-Holland | 10 | 12 | 6 | 8 | 5 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | | | | | 641 |
| Zeeland | 7 | 7 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 | 2 | | | 4 | | | 2 | | 98 |
| Noord-Brabant | 7 | 12 | 10 | 8 | 8 | 5 | 3 | | 1 | 1 | | | | | | 446 |
| Limburg | 6 | 8 | 10 | 10 | 6 | 2 | 3 | | | 2 | | | | | | 239 |

We gaan er in deze opgave van uit dat een partij een zetel in de Eerste Kamer krijgt als er tenminste 2221 punten behaald worden.

De PvdD kon net een Eerste Kamerzetel behalen want $135 + 101 + 365 + 261 + 489 + 641 + 446 = 2438$ en dat is meer dan de benodigde 2221 punten.

De partijen FNP, ONH, PvZ en PvhN gingen een samenwerkingsverband aan onder de naam OSF. Daarmee wilden zij een zetel behalen in de Eerste Kamer. Uit de tabel blijkt, dat dit niet zou lukken als alleen hun 8 Statenleden op de OSF-lijst zouden stemmen.

In de krant NRC van 7 maart 2011 stond een artikel over een 'deal van 50+ en OSF: tussen 50+ en de OSF is een afspraak in de maak die beide partijen een zetel in de Eerste Kamer moet opleveren. Gedacht wordt aan een constructie waar twee van de 50+-Statenleden op de OSF stemmen.'

Dat blijkt mogelijk, maar dan moet er ook een Statenlid van de OSF op de 50+-partij stemmen.

7p 22 Laat zien dat het op die manier inderdaad mogelijk is om zowel de 50+-partij als de OSF een zetel in de Eerste Kamer te laten behalen.