Examen VWO

2013

tijdvak 2
woensdag 19 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

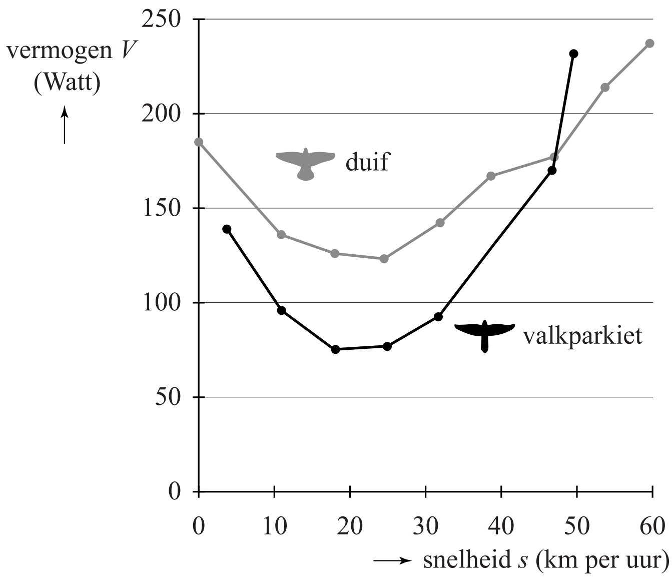
regel	voorwaarde
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g>0,\ g \neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g \neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g>0,\ g \neq 1,\ a>0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g>0,\ g \neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p \neq 1$

De valkparkiet

Er wordt veel onderzoek gedaan naar het verband tussen het vermogen (het energieverbruik per seconde) en de vliegsnelheid bij vogels. Het vermogen V wordt gemeten per kg borstspier en uitgedrukt in Watt.

Een onderzoek heeft uitgewezen dat de grafiek van het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen U-vormig is. Dat wil zeggen: vliegen met lage of hoge snelheid kost veel vermogen, terwijl vliegen met een snelheid daartussenin minder vermogen kost.
In de figuur is dit verband voor valkparkieten en duiven weergegeven.

figuur



Dit onderzoek toont bij valkparkieten een bij benadering kwadratisch verband aan tussen de vliegsnelheid en het vermogen.
Voor valkparkieten geldt de volgende formule:

$$V = 0{,}19s^2 - 8{,}71s + 169{,}72$$

Hierbij is V het vermogen in Watt en s de snelheid in km per uur.

3p **1** Bereken met behulp van de formule bij welke snelheden het vermogen V van een valkparkiet 120 Watt is.

4p **2** Bereken met behulp van de afgeleide bij welke snelheid het vermogen V van een valkparkiet minimaal is.

Ook bij duiven kunnen we een formule opstellen voor het verband tussen s en V. In de figuur kunnen we aflezen dat duiven bij een snelheid van 8 km per uur en bij een snelheid van 34 km per uur een vermogen van 150 Watt ontwikkelen.
Voor duiven is het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen dan van de vorm:

$$V = p \cdot (s-8)(s-34)+150$$

Ook hier is V het vermogen in Watt en s de snelheid in km per uur.

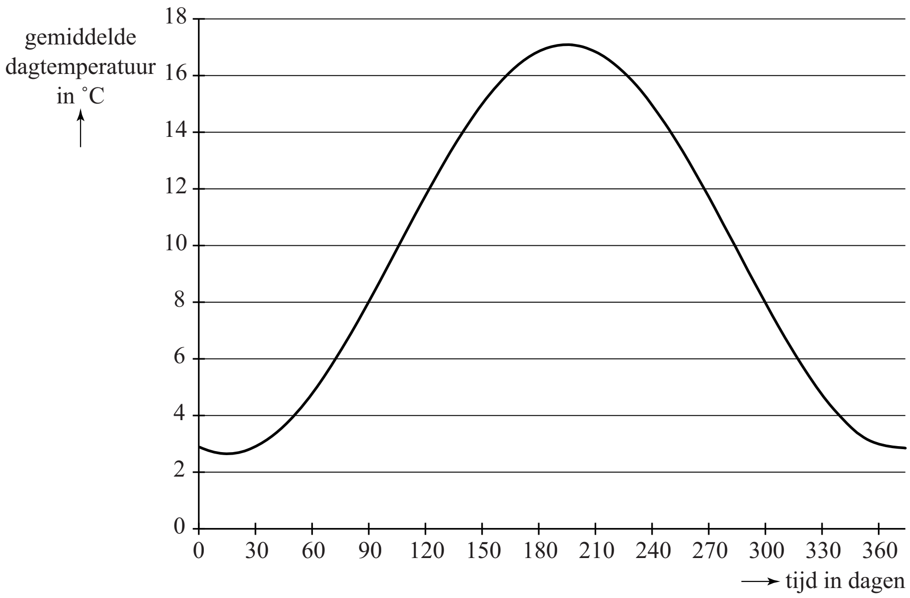
Het is bekend dat duiven die stil in de lucht hangen $(s=0)$ een vermogen van 185 Watt ontwikkelen.
Met dit gegeven kunnen we nu de constante p berekenen.

5p **3** Bereken p en herschrijf de formule in de vorm $V = as^2 + bs + c$.

Zomer in Ukkel

Een Belgische onderzoeker houdt zich bezig met modellen voor het temperatuurverloop. Hij bekeek daarvoor de historische gegevens van het weerstation in Ukkel (België). Zie onderstaande figuur. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



De vloeiende lijn geeft de gemiddelde dagtemperatuur per dag aan en is ontstaan uit gemiddelden van de dagtemperatuur, gemeten over verschillende jaren. De gemiddelde dagtemperatuur is maximaal 17,1°C en minimaal 2,6°C.

De vloeiende lijn laat zich redelijk goed beschrijven door een sinusoïde. Een algemene formule voor een sinusoïde is bijvoorbeeld:

$$T = a + b\sin\big(c(t-d)\big)$$

De onderzoeker beschreef de vloeiende lijn met de volgende formule:

$$T = 9{,}85 + 7{,}25\sin\big(0{,}0172(t-106)\big)$$

Hierin is T de gemiddelde dagtemperatuur in °C, t de tijd in dagen en $t = 0$ op 1 januari.

5p **4** Laat zien hoe de waarden van a, b, c en d uit de figuur volgen.

2p **5** Bereken met behulp van de formule voor welke waarde van t de gemiddelde dagtemperatuur het hoogst is.

Een onderzoeker vraagt zich af: als de aarde opwarmt, hoeveel aangename zomerse dagen levert dat extra op in Ukkel?
Een dag met een gemiddelde dagtemperatuur van ten minste 16°C is een aangename zomerse dag. Dat komt volgens het model beschreven met de formule

$$T = 9{,}85 + 7{,}25\sin\left(0{,}0172\left(t - 106\right)\right)$$

jaarlijks 65 keer voor. Als door de opwarming van de aarde de gemiddelde dagtemperatuur in Ukkel elke dag twee graden hoger is, moet het model worden aangepast en verandert de formule.

4p **6** Maak een nieuwe formule en bereken daarmee hoeveel extra aangename zomerse dagen deze twee graden temperatuurstijging zou opleveren.

Aan het wereldkampioenschap voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee. Ze speelden eerst een groepsfase. Hierin speelden de landen in 8 poules van 4 teams. In zo'n poule speelt ieder team één wedstrijd tegen elk ander team. De twee hoogst eindigende teams per poule gingen door naar de knock-outfase. Deze overgebleven teams speelden allemaal één wedstrijd tegen een ander team en de verliezer moest naar huis. De winnaars gingen door en speelden weer één wedstrijd tot er uiteindelijk nog twee teams over waren. Die speelden de finale. Er was ook nog een wedstrijd om de derde plaats, de troostfinale.

In eerdere edities van het WK waren er minder deelnemende teams. Zo waren er in 1974 in West-Duitsland maar 16 teams. Die speelden volgens hetzelfde schema: eerst in poules van 4 en de twee hoogst eindigende teams naar de knock-outfase.

Er werden in 1974 natuurlijk veel minder wedstrijden gespeeld dan in 2010.

5p **7** Ga met een berekening na of de verdubbeling van het aantal deelnemende teams ook geleid heeft tot een verdubbeling van het totaal aantal wedstrijden.

Alle WK's kenden een groepsfase met poules van 4 teams. Dat hoeft natuurlijk niet. Er zouden ook meer teams in een poule kunnen zitten. Dat leidt dan wel tot een groter aantal poulewedstrijden.
$W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule met n teams. Er geldt nu dat $W(n+1) = W(n) + n$ waarbij $W(n+1)$ het aantal wedstrijden in een poule met $n+1$ teams is.

4p **8** Toon aan dat dit geldt.

Engelse sportstatistici hebben zich voor het toernooi van 2010 aan voorspellingen gewaagd. Zij keken voor de deelnemende landen naar het bruto binnenlands product per hoofd van de bevolking (bbp), de bevolkingsomvang (pop) en de wedstrijdervaring (erv). Dat leverde de volgende formule op:

$$\mathrm{GD}(A,B) = 0{,}316 \cdot \log\left(\frac{pop(A)}{pop(B)}\right) + 0{,}334 \cdot \log\left(\frac{bbp(A)}{bbp(B)}\right) + 1{,}702 \cdot \log\left(\frac{erv(A)}{erv(B)}\right)$$

Hierbij is $\mathrm{GD}(A,B)$ het aantal doelpunten dat land A naar verwachting meer zal scoren dan land B als zij tegen elkaar spelen. Dat aantal hoeft geen geheel getal te zijn en kan ook negatief zijn. Voor wedstrijdervaring koos men het aantal deelnames aan wereldkampioenschappen vóór dat van 2010.

Voor Italië en Engeland zijn bbp en pop nagenoeg even groot, zodat alleen de wedstrijdervaring het verschil bepaalt. Vóór 2010 deed Italië 16 keer mee aan een wereldkampioenschap, Engeland 12 keer.

4p **9** Bereken met behulp van de formule het voorspelde aantal doelpunten dat Italië méér maakt als het tegen Engeland zou spelen. Rond het antwoord af op twee decimalen.

Logischerwijs moet de uitkomst van de formule tegengesteld worden als je de landen verwisselt. Er zou dus voor elk tweetal landen A en B moeten gelden: $\mathrm{GD}(A,B) = -\mathrm{GD}(B,A)$.

3p **10** Toon de juistheid hiervan aan met behulp van de rekenregels voor logaritmen.

Volgens de formule wint Nederland niet van Brazilië omdat $\mathrm{GD}(Ned, Bra) = -0{,}67$.

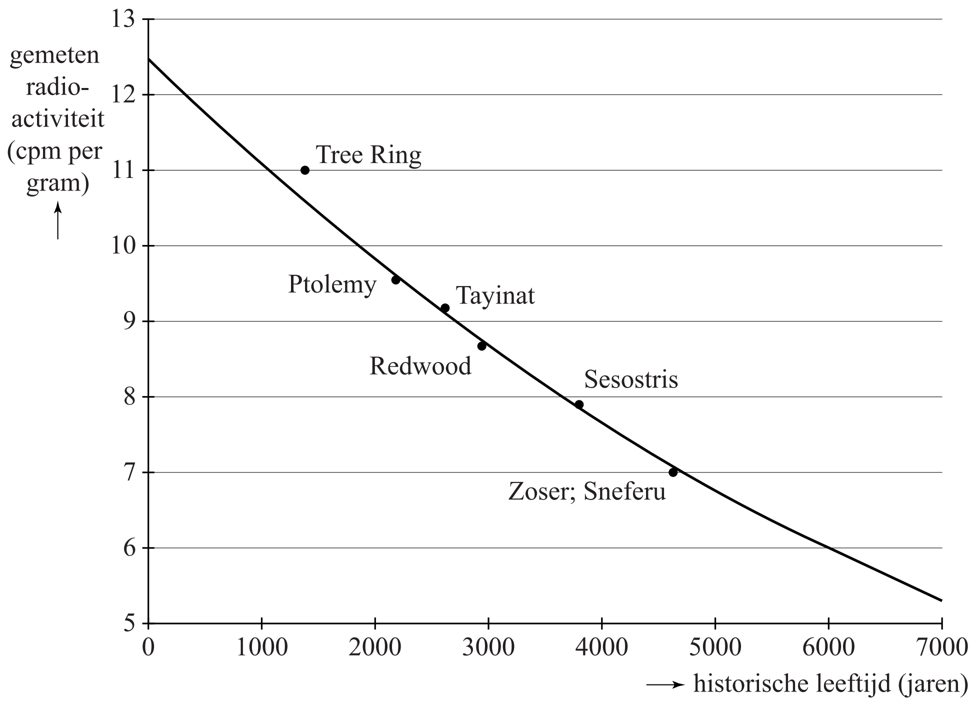
De waarde –0,67 valt eigenlijk nog wel mee. Brazilië heeft veel meer inwoners dan Nederland: 185,7 miljoen tegenover 16,6 miljoen. Ook nam Brazilië vóór 2010 vaker deel: 18 keer en Nederland maar 8 keer. Blijkbaar is het bbp van Nederland veel groter dan dat van Brazilië.

5p **11** Bereken hoeveel keer zo groot het bbp van Nederland is als het bbp van Brazilië.

Archeologie

In de archeologie gebruikt men de C14-methode bij het vaststellen van de historische leeftijd (ouderdom) van bepaalde vondsten. Deze methode werd in 1949 ontwikkeld door de Amerikaanse scheikundige Libby, die hiervoor de Nobelprijs gekregen heeft. Volgens de theorie neemt de radioactiviteit van dood organisch materiaal exponentieel af en daarom kun je door radioactiviteit te meten bepalen hoe oud een voorwerp is.
De figuur hieronder komt uit een artikel van Libby uit 1949. Libby testte de C14-methode door deze te gebruiken op zes verschillende voorwerpen waarvan de historische leeftijd op een andere manier bekend was.

figuur



Langs de verticale as staat de gemeten radioactiviteit in cpm (counts per minute) per gram materiaal. Dit is een maat voor de hoeveelheid C14.
Langs de horizontale as staat de historische leeftijd van het voorwerp in jaren.
Volgens de theorie neemt de gemeten radioactiviteit exponentieel af.
De grafiek gaat door de punten (0; 12,5) en (6000; 6). Hiermee kan men de groeifactor berekenen.

3p **12** Bereken met deze punten de groeifactor per jaar in 7 decimalen nauwkeurig.

Voor het vervolg van de opgave gaan we uit van de formule:

$$N = 12{,}5 \cdot 0{,}999878^t$$

Hierin is N de gemeten radioactiviteit van het voorwerp in cpm per gram en t is de historische leeftijd volgens de C14-methode van het voorwerp in jaren.

De punten in de figuur stellen de metingen aan de voorwerpen voor. Het punt 'Ptolemy' hoort bij een stuk hout van een doodskist van een Egyptische mummie. Deskundigen schatten dat deze doodskist uit ongeveer 200 voor Chr. dateert. Voor dit hout werd in 1949 een radioactiviteit van 9,5 cpm per gram gemeten.

4p **13** Bereken het verschil tussen de historische leeftijd volgens de C14-methode en de schatting van de deskundigen.

De formule $N = 12{,}5 \cdot 0{,}999878^t$ kan herschreven worden tot de formule $N = 12{,}5 \cdot e^{at}$.

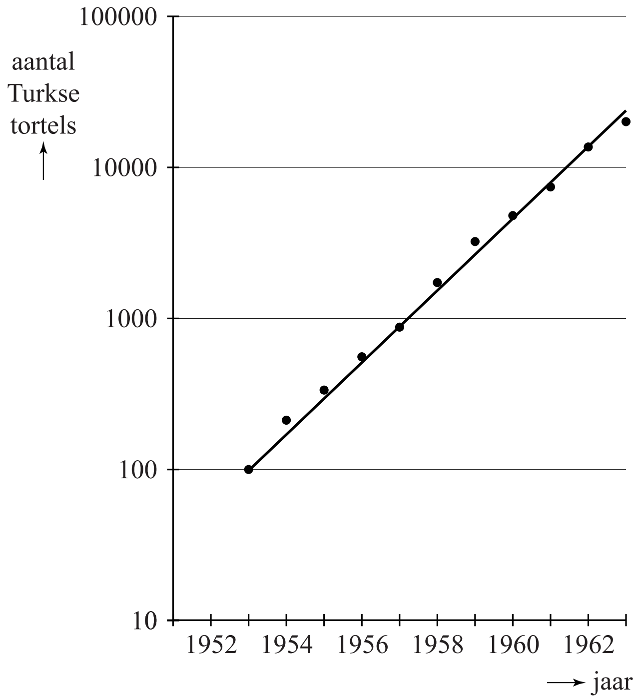
3p **14** Bereken a in 6 decimalen nauwkeurig.

Turkse tortels

Een Turkse tortel is een bepaald soort duif. Oorspronkelijk broedde de Turkse tortel alleen in Turkije, maar in de loop van de vorige eeuw heeft deze vogel zich over heel Europa verspreid. In 1950 werden ze voor het eerst in Nederland gezien.

In figuur 1 zie je de groei van het aantal Turkse tortels in Nederland gedurende de periode 1953 tot en met 1963.

figuur 1



Langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.
De punten liggen bij benadering op een rechte lijn. Dat betekent dat het aantal Turkse tortels in de periode 1953 tot en met 1963 bij benadering exponentieel groeide. Een formule voor het aantal Turkse tortels in Nederland gedurende deze jaren is: $N(t) = 100 \cdot 1{,}73^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ in 1953.

4p **15** Toon met behulp van figuur 1 aan dat de formule $N(t) = 100 \cdot 1{,}73^t$ juist is.

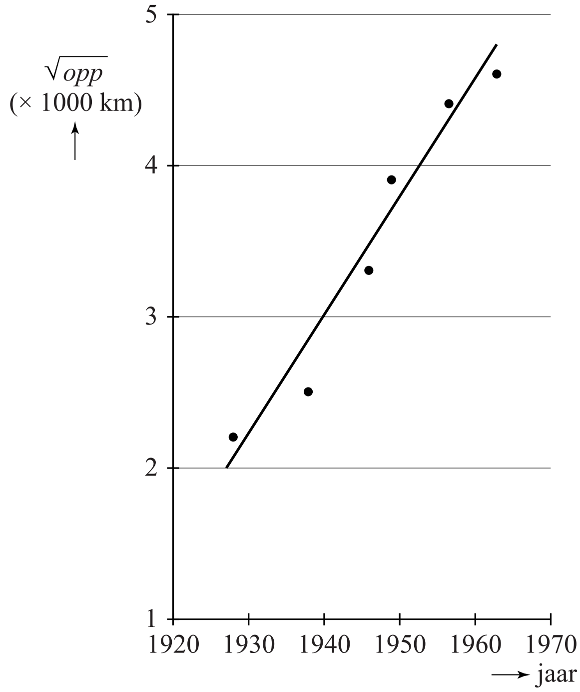
Het aantal tortels groeide in de eerste jaren vrij langzaam. Pas na enige tijd was de groeisnelheid groter dan 1000 tortels per jaar.

5p **16** Bereken met behulp van de afgeleide $N'(t)$ in welk jaar de groeisnelheid van het aantal Turkse tortels groter was dan 1000 tortels per jaar.

Het gebied waar een soort voorkomt, wordt het verspreidingsgebied genoemd.

Figuur 2 geeft informatie over de grootte van het verspreidingsgebied van de Turkse tortel. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage. Langs de verticale as staat de wortel van de oppervlakte ($\sqrt{opp}$) van het verspreidingsgebied.
In figuur 2 kun je bijvoorbeeld aflezen dat voor 1957 geldt:
$\sqrt{opp} \approx 4400$ km.
Hiermee kan worden berekend dat de oppervlakte van het verspreidingsgebied in 1957 dus ruim 19 miljoen vierkante kilometer is.

figuur 2



We nemen aan dat het verspreidingsgebied cirkelvormig is, met straal r in km. Voor de oppervlakte van het gebied geldt dan: $opp = \pi \cdot r^2$.

Hieruit volgt: $r = \dfrac{\sqrt{opp}}{\sqrt{\pi}}$.

In figuur 2 is te zien dat $\sqrt{opp}$ uitgezet tegen de tijd bij benadering een rechte lijn oplevert. Dit betekent dat in de periode 1930 tot en met 1960 de gemiddelde toename per jaar van de straal van het gebied constant is.

4p **17** Bereken met behulp van de rechte lijn in figuur 2 de gemiddelde toename in km per jaar van de straal van het verspreidingsgebied in de periode 1930 tot en met 1960.

Een ander model waarmee de groei van de straal kan worden berekend, wordt beschreven met de volgende formule:

$$s = \frac{290}{m}\sqrt{\log(V)}$$

s is de groei van de straal in km per jaar;
V is het gemiddeld aantal vrouwelijke nakomelingen dat een wijfje gedurende haar hele leven voortbrengt, $V \geq 1$;
m is de gemiddelde leeftijd in jaren waarop een vrouwtje jongen krijgt, $m > 0$.

Voor de Turkse tortel heeft men in een bepaalde periode de volgende waarden gevonden: $m = 1{,}81$ en $V = 1{,}33$.
Neem aan dat door ongunstige omstandigheden voor de Turkse tortel de waarde van V met 10% afneemt, maar dat m gelijk blijft.

5p **18** Bereken met hoeveel procent de waarde van s zal afnemen als gevolg van de afname van V.

We bekijken de volgende twee situaties:
1. De gemiddelde leeftijd waarop een vrouwtje jongen krijgt neemt toe, maar het gemiddeld aantal vrouwelijke nakomelingen verandert niet.
2. Het gemiddeld aantal vrouwelijke nakomelingen wordt groter, maar de gemiddelde leeftijd waarop een vrouwtje jongen krijgt verandert niet.

4p **19** Beredeneer met behulp van de formule voor elk van deze twee situaties of de groei van de straal groter of kleiner zal worden.

Tricoda

Het familiespel Tricoda is uitgeroepen tot Speelgoed van het jaar 2010. Het spel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor, het cijfer 2 twee keer, het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt. Zie de figuur.

figuur

1
2 2
3 3 3
4 4 4 4
5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7

Elke speler krijgt 3 stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De 3 stenen vormen zo een cijfertrio. De stenen staan zo op de standaards, dat elke speler wel de cijfertrio's van de andere spelers ziet, maar zijn eigen cijfertrio niet. Zie foto.

foto

Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan.

6p **20** Bereken het aantal mogelijke verschillende cijfertrio's dat een speler bij de start van het spel kan krijgen.