

Examen VWO 2012

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES volgens syllabus pilot

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g \log a + {}^g \log b = {}^g \log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g \log a - {}^g \log b = {}^g \log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g \log a^p = p \cdot {}^g \log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^g \log a = \frac{p \log a}{p \log g}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

Woordenschat

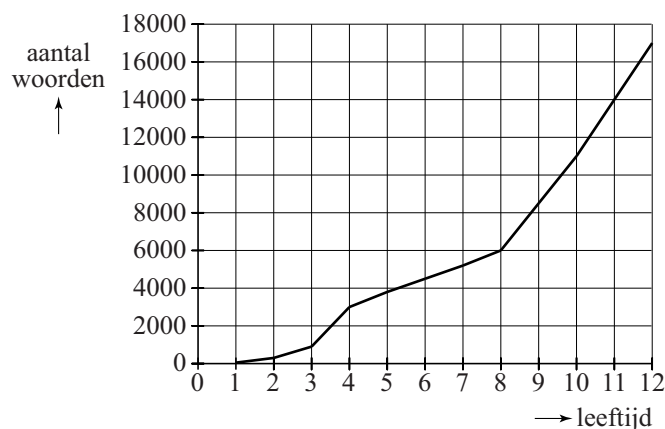
De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat. Hoe groter je woordenschat is, des te beter kun je teksten lezen, teksten begrijpen en je mondeling en schriftelijk in een taal uitdrukken. In deze opgave beperken we ons tot mensen die opgroeien met de Nederlandse taal als moedertaal.

De woordenschat van een kind groeit bijna onmerkbaar door luisteren, spreken en lezen. In Nederland heeft een kind als het de leeftijd van 4 jaar bereikt een woordenschat van gemiddeld 3000 woorden. Tot de 12e verjaardag groeit dit tot gemiddeld 17 000 woorden.

In onderstaande figuur is dit grafisch weergegeven. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur

gemiddelde woordenschat van Nederlandstalige kinderen in Nederland



Uit de figuur blijkt dat de gemiddelde woordenschat van de 8e tot de 12e verjaardag sneller groeit dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

- 4p 1 Bereken met hoeveel woorden per jaar de gemiddelde woordenschat van een kind meer groeit van de 8e tot de 12e verjaardag dan van de 4e tot de 8e verjaardag. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17 000 op de 12e verjaardag. Na de 12e verjaardag gaat de woordenschat onder jongeren behoorlijk variëren: Bij het bereiken van de leeftijd van 21 jaar varieert deze van 45 000 tot 150 000.

Bij sommige jongeren spreken we van een **hoge** woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150 000 wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:

$$W_h = 17000 \cdot 1,27^t$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

In deze formule is de jaarlijkse groeifactor afgerond op twee decimalen.

3p **2** Bereken deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij andere jongeren spreken we van een **lage** woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45 000 op hun 21e verjaardag. Hiervoor geldt de volgende formule:

$$W_l = at + b$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

Ga ook hierbij uit van een woordenschat van 17 000 op de 12e verjaardag.

Met behulp van de formule $W_l = at + b$ kan de woordenschat die jongeren met een lage woordenschat op hun 18e verjaardag hebben, berekend worden.

Vervolgens kan met behulp van de formule $W_h = 17000 \cdot 1,27^t$ worden berekend hoeveel maanden **eerder** jongeren met een hoge woordenschat deze zelfde woordenschat zullen hebben.

6p **3** Bereken dit aantal maanden.

In de praktijk gebruikt men graag formules waar de werkelijke leeftijd in voorkomt. Voor jongeren met een hoge woordenschat geldt de formule

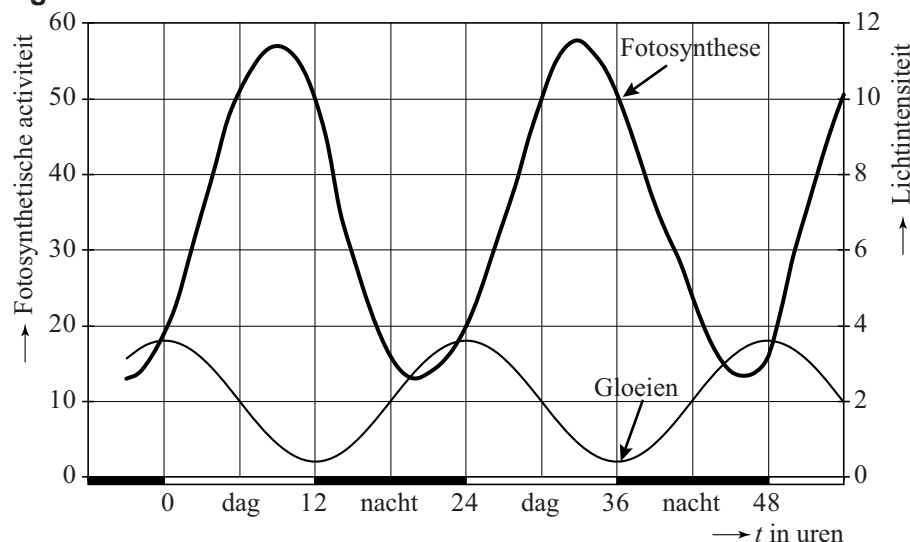
$W_h = 17000 \cdot 1,27^t$ (met $t = 0$ op de 12e verjaardag).

3p **4** Schrijf deze in de vorm $W_h = b \cdot g^L$, waarbij L de werkelijke leeftijd is. Rond b af op tientallen.

Algen

Van een bepaald soort ééncellige algen (*Gonyaulax polyedra*) is het dag-en-nachtritme onderzocht. De algen werden blootgesteld aan afwisselend 12 uur licht en 12 uur donker. Deze perioden noemen we respectievelijk dag en nacht. In de figuur zijn resultaten van dit onderzoek te zien. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



Eén van de gemeten activiteiten is fotosynthese, het opslaan van energie met behulp van (zon)licht. De intensiteit van de fotosynthese is weergegeven op de linker verticale as.

De grafiek voor de fotosynthese F als functie van de tijd, kan benaderd worden door een formule van de vorm:

$$F = a + b \sin(c(t-3))$$

Hierbij is t de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

- 4p **5** Stel deze formule op. Licht je antwoord toe.

Sommige algen lichten vanzelf op in het donker. Dit verschijnsel, gloeien genaamd, is in de figuur ook met een grafiek weergegeven. De lichtintensiteit G werd gemeten in eenheden die langs de rechter verticale as zijn uitgezet.

Men kan de grafiek van het gloeien benaderen met de formule:

$$G = 2,0 + 1,6 \sin\left(\frac{1}{12} \pi(t-18)\right)$$

Hierin is t weer de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

Tijdens iedere periode van 24 uur is de lichtintensiteit van het gloeien gedurende een bepaalde tijd groter dan 3 eenheden.

- 5p **6** Bereken met behulp van de formule van G hoe lang de lichtintensiteit van het gloeien in een periode van 24 uur groter is dan 3 eenheden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

De lichtintensiteit bij gloeien is na een maximum eerst toenemend dalend en daarna afnemend dalend.

- 4p 7 Onderzoek met behulp van een raaklijn aan de grafiek op de uitwerkbijlage met welke snelheid de lichtintensiteit maximaal afneemt bij gloeien.

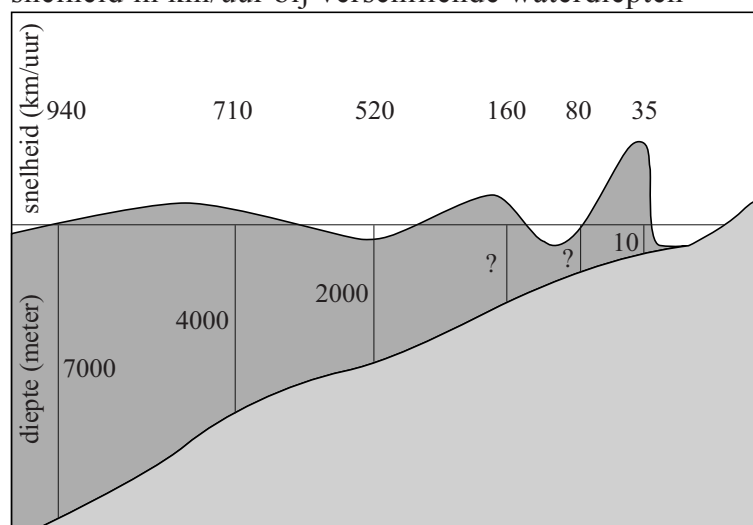
Tsunami

Op 26 december 2004 werd Zuidoost-Azië getroffen door een tsunami. Een tsunami is één heel lange golf die bij de kust heel hoog wordt. De tsunami had rampzalige gevolgen voor een aantal kustgebieden. Dit kwam door de enorme hoeveelheid water die door deze tsunami werd meegevoerd.

In onderstaande figuur is een schematisch overzicht te zien van het verloop van een tsunami. Boven elke genoemde waterdiepte is steeds de bijbehorende snelheid weergegeven.

figuur

snelheid in km/uur bij verschillende waterdiepten



In de figuur is bijvoorbeeld te zien dat een tsunami bij een diepte van 4000 meter zich met een snelheid van 710 km/uur verplaatst.

Voor de snelheid van een tsunami geldt bij benadering de volgende formule:

$$v = 11,3\sqrt{d}$$

Hierin is v de snelheid in km/uur en d de waterdiepte in meter.

In de figuur ontbreken twee waarden voor de waterdiepte. Zij zijn aangegeven met een vraagteken.

- 4p **8** Bereken met behulp van bovenstaande formule en de gegevens uit de figuur deze twee ontbrekende waarden.

De tsunami van december 2004 werd veroorzaakt door een aardbeving onder zee, 150 km uit de kust van het Indonesische eiland Sumatra.

De tsunami plantte zich voort door de Golf van Bengalen, waar de zee ongeveer 3 km diep is.

- 3p **9** Bereken hoeveel minuten een tsunami nodig heeft om een afstand van 150 km af te leggen in water van 3 km diep.

In de figuur is ook te zien dat in de buurt van de kust, waar de waterdiepte niet zo groot is, de golfhoogte van een tsunami groter wordt. Op volle zee, waar de waterdiepte groot is, is de golfhoogte niet zo hoog.

Bij tsunami's is het volgende verband gevonden tussen waterdieptes en golfhoogtes:

$$h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0,25} \cdot h_1$$

Hierin is h_1 de golfhoogte bij waterdiepte d_1 en h_2 de golfhoogte bij waterdiepte d_2 ; h_1 , d_1 , h_2 en d_2 zijn in meters.

De tsunami van 26 december 2004 ontstond in een gebied met waterdiepte 1 km

en golfhoogte 60 cm. Met deze gegevens en de formule $h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0,25} \cdot h_1$

kunnen we voor het verdere verloop van deze tsunami het verband tussen de waterdiepte d en de golfhoogte h beschrijven met de formule:

$$h = 3,37 \cdot d^{-0,25}$$

- 4p **10** Toon dit aan.

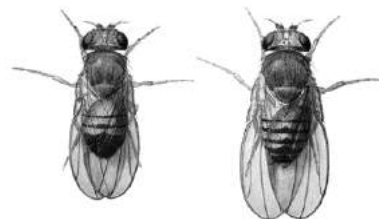
Naarmate een golf dichterbij de kust komt, neemt de waterdiepte steeds verder af. Dit is in de figuur te zien. In de figuur kun je ook zien dat de golfhoogte toeneemt als de golf dichterbij de kust komt.

Met behulp van de afgeleide van h kun je onderzoeken of de **toename** van de golfhoogte groter of kleiner wordt naarmate de golf dichterbij de kust komt.

- 4p **11** Onderzoek met behulp van een schets van de afgeleide van h of deze toename groter of kleiner wordt naarmate de golf dichterbij de kust komt.

Fruitvliegjes

Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (*Drosophila melanogaster*). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken.



Het aantal fruitvliegjes neemt de eerste weken exponentieel toe. Bij een praktische opdracht tellen leerlingen uit 5vwo na 2 weken 140 fruitvliegjes en na 5 weken 1065 fruitvliegjes. Bij deze gegevens is een exponentiële formule te maken voor het aantal fruitvliegjes F na t weken.

4p **12** Geef deze formule. Licht je antwoord toe.

In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbepert toenemen. Het maximale aantal fruitvliegjes is afhankelijk van de grootte van de kweekruimte. Een ander experiment, dat werd gestart op 10 november 2011, werd in een kleinere kweekruimte uitgevoerd. Bij het vervolg van deze opgave gaan we uit van de volgende formule die het aantal fruitvliegjes bij dit experiment beschrijft:

$$F = \frac{340}{1 + 54e^{-0,24t}}$$

Hierbij is t de tijd in dagen na 10 november 2011 en F het aantal fruitvliegjes.

3p **13** Welke aantallen fruitvliegjes zijn volgens bovenstaande formule in de kweekruimte mogelijk? Licht je antwoord toe.

Fruitvliegjes zijn met een beetje etherdamp gemakkelijk te verdoven waarna je ze kan tellen en met een loep bestuderen. Op de dag dat er de meeste fruitvliegjes bijkomen wil Boris ze verdoven.

6p **14** Toon aan dat de afgeleide van F gelijk is aan $F'(t) = \frac{4406,4e^{-0,24t}}{(1 + 54e^{-0,24t})^2}$ en bereken

met behulp van deze afgeleide op welke datum er de meeste fruitvliegjes bijkomen.

Een andere reden dat vaak gebruik gemaakt wordt van fruitvliegjes is dat een aantal eigenschappen goed zichtbaar zijn: oogkleur (**rood/zwart**), vleugelvorm (**kort/lang**) en huidskleur (**donker/geel**). Een fruitvliegje met zwarte oogkleur, korte vleugels en een gele huidskleur wordt getypeerd als: **z-k-g**. Op basis van deze eigenschappen zijn er acht typen mannetjes en acht typen vrouwtjes.

Voor een kruisingsexperiment moeten vier fruitvliegjes, twee mannelijke en twee vrouwelijke, in een kweekruimte worden geplaatst. Hierbij gelden twee eisen:

- De twee mannelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
- De twee vrouwelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.

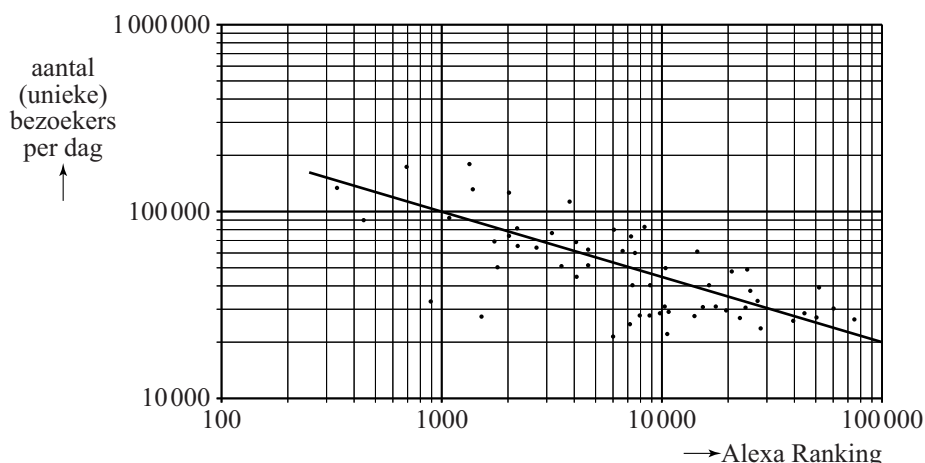
4p **15** Bereken hoeveel verschillende samenstellingen in de kweekruimte mogelijk zijn.

Websites

Een manier om de populariteit van websites te meten, is door naar de zogenoemde *Alexa Ranking* te kijken. Het internetbedrijf Alexa houdt bij hoe vaak websites bezocht worden, en stelt daarvan een ranglijst op. Zo heeft de website google.com wereldwijd ranking 1 met 1,2 miljard unieke bezoekers per dag (begin 2011).

Voor een aantal Nederlandse websites is het verband tussen de Alexa Ranking en het aantal unieke bezoekers per dag weergegeven in onderstaande figuur. In de figuur is op beide assen gebruik gemaakt van een logaritmische schaalverdeling. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



In de figuur is te zien dat er verschillende websites zijn met een Alexa Ranking tussen de 1000 en de 2000. Het verschil tussen de bijbehorende aantallen unieke bezoekers per dag van deze websites is vrij groot.

- 4p **16** Bereken dit maximale verschil met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage.

De punten in de figuur liggen globaal op een rechte lijn. Deze lijn is in de figuur getekend. Bij deze lijn hoort de formule $B = 1118\,000 \cdot r^{-0,35}$.

Hierin is B het aantal unieke bezoekers per dag en r de Alexa Ranking van de website.

Lang niet bij alle aantallen unieke bezoekers per dag is in de figuur precies af te lezen welke Alexa Ranking de betreffende website heeft. Met de hierboven vermelde formule is deze ranking wel te berekenen.

- 3p **17** Bereken met behulp van de formule de Alexa Ranking van een website met 25 000 unieke bezoekers per dag.

- 3p **18** Beredeneer aan de hand van de formule dat de grafiek van B daalt.

De formule $B = 1118\,000 \cdot r^{-0,35}$ kan herschreven worden in de vorm $\log B = a + b \cdot \log r$.

- 4p **19** Bereken de waarden van a en b .

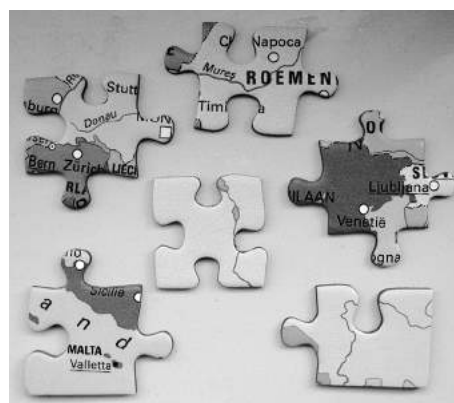
Puzzelstukjes

Op de foto hiernaast zie je enkele puzzelstukjes van een legpuzzel van Europa. Als je aan een puzzel begint, kan je besluiten om de puzzelstukjes eerst op soort te selecteren: de hoekstukjes, de randstukjes en alle andere stukjes.

Deze soorten kunnen verschillende vormen hebben.

Om te onderzoeken hoeveel verschillende vormen er eigenlijk zijn, voeren we een aantal regels in:

foto



- We beschouwen de puzzelstukjes als vierkantjes;
- Een zijde kan recht zijn of met een inkeping of met een uitstulping;
- Bij een hoekstukje heb je twee aan elkaar grenzende rechte zijden (zie het stukje rechtsonder op de foto), bij een randstukje is één zijde recht (zie het stukje linksonder op de foto) en bij de overige puzzelstukjes is er geen enkele zijde recht;
- Twee stukjes hebben een gelijke vorm als ze door draaiing (over een kwart-, halve of driekwartslag) in elkaar overgaan. De twee puzzelstukjes linksboven en midden boven op de foto hebben beide twee inkepingen en twee uitstulpingen maar zijn toch verschillend van vorm;
- Stukjes die alleen door op de kop te leggen en niet door draaiing in elkaar over kunnen gaan, noemen we wel verschillend van vorm aangezien er op de achterkant niet de kaart van Europa staat.

7p **20** Bereken hoeveel verschillende vormen er in het totaal volgens bovenstaande regels zijn.