

Examen VWO

2009

tijdvak 2
woensdag 24 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A1

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Zeemonsters

In 1972 werd de mesoplodon densirostris ontdekt in de oceaan. Het is een dolfijnensoort die 7 meter lang kan worden. Mede naar aanleiding van deze vondst deed de bioloog C. Paxton onderzoek naar de vraag hoeveel van dergelijke grote diersoorten er in de toekomst nog meer ontdekt zullen worden. Paxton beperkte zich tot wat hij zeemonsters noemde: dieren die in zee leven en meer dan 2 meter lang kunnen worden.

foto



Een mesoplodon densirostris

Op basis van gegevens over het aantal ontdekte zeemonsters in verschillende jaren stelde Paxton het volgende model op:

$$P(t) = \frac{264t - 476657}{t - 1767}$$

Met dit model kon hij een schatting maken van het aantal ontdekte soorten tot en met een zeker jaar t . In deze formule is $P(t)$ het aantal soorten dat tot en met jaar t bekend is. Dus als je een schatting wilt van het aantal soorten dat bijvoorbeeld op het eind van het jaar 1980 bekend is, dan moet je $t = 1980$ invullen in de formule. De uitkomst wordt afgerond op gehele.

- 3p 1 Vanaf eind 1895 tot en met eind 1995 zijn er in werkelijkheid 30 soorten ontdekt. Bereken hoeveel soorten er volgens het model van Paxton zouden zijn ontdekt in deze periode.

J. Groot schreef in 2003 een artikel in het wiskundeblad Pythagoras over het model van Paxton. Daarin schreef hij dat hij met dezelfde gegevens een ander model had gevonden. Zijn model zag er als volgt uit:

$$G(t) = 218 \cdot (1 - 0,9799^{t-1798})$$

In deze formule is $G(t)$ het aantal soorten dat tot en met jaar t bekend is. Ook hier wordt de uitkomst afgerond op gehele.

De twee formules hierboven zijn verschillend, dus je mag verwachten dat beide modellen niet altijd dezelfde uitkomsten opleveren. Voor $t = 1931$ bijvoorbeeld geeft het model van Paxton 202 soorten en het model van Groot 203. Vanwege de afronding op gehelen is er een aantal jaren waarvoor de twee modellen wél dezelfde uitkomst geven. Onder andere is dat het geval bij $t = 1938$: beide modellen leveren dan elk 205 bekende soorten. Er zijn nog meer jaren uit de periode 1930 tot en met 1945 waarvoor beide modellen dezelfde uitkomst geven.

4p **2** Onderzoek welke jaren dat zijn.

Paxton en Groot ontwikkelden hun modellen vooral om een schatting te kunnen maken van het aantal soorten zeemonsters dat men in de toekomst nog zou kunnen ontdekken. Elk van deze beide modellen voorspelt dan ook dat het aantal soorten zeemonsters een grenswaarde heeft.

Volgens het model van Paxton zullen er na 2009 nog 42 soorten zeemonsters ontdekt worden.

4p **3** Bereken hoeveel soorten zeemonsters er na 2009 nog ontdekt zullen worden volgens het model van Groot.

Behalve de formules van Paxton en Groot zijn er nog meer formules denkbaar die de werkelijke aantallen bekende soorten zeemonsters goed benaderen. Een mogelijkheid is bijvoorbeeld een formule van de vorm $F(t) = \sqrt{at + b}$. In deze formule is $F(t)$ het aantal soorten tot en met jaar t . De waarden voor a en b worden zo gekozen dat het model precies overeenkomt met de werkelijke aantallen soorten zoals die eind 1895 en eind 1995 bekend waren. Eind 1895 waren er in werkelijkheid 187 soorten zeemonsters bekend. Eind 1995 waren dat er 217. Er kan nu worden berekend dat de waarde van a gelijk is aan 121,2.

4p **4** Bereken de waarde van b .

Conditietest

Om de conditie te meten van mensen worden vaak conditietests gebruikt. De conditietest die in deze opgave vermeld wordt, is een gangbare conditietest waarbij iedere prestatie een score oplevert. Hoe hoger de score, hoe beter de conditie.

In Canada is een onderzoek gedaan onder een groot aantal jongens van 12 tot en met 17 jaar. In tabel 1 staan de resultaten van het onderzoek voor jongens van 17 jaar.

tabel 1

score	5,44	6,89	7,50	8,36	8,81	9,30	9,84	10,23	11,09	11,87	12,58
cumulatief percentage	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95

In tabel 1 is bijvoorbeeld af te lezen dat 90% van de jongens een score van 11,87 of minder behaalt. De scores in de tabel zijn gerangschikt op cumulatief percentage.

De scores van de Canadese jongens van 17 jaar zijn bij benadering normaal verdeeld. Dat kun je zien als je de scores van tabel 1 uitzet op normaal waarschijnlijkheidspapier.

3p **5** Zet de scores van tabel 1 uit op het normaal waarschijnlijkheidspapier op de uitwerkbijlage en leg met behulp van deze tekening uit waarom er bij benadering sprake is van een normale verdeling.

4p **6** Bepaal met het normaal waarschijnlijkheidspapier van de uitwerkbijlage of met de tabel het gemiddelde en de standaardafwijking van de scores van jongens van 17 jaar.

Ook voor Canadese jongens in andere leeftijdsgroepen zijn de scores (bij benadering) normaal verdeeld.

Voor Canadese jongens van 13 jaar is het gemiddelde 7,4 en de standaardafwijking 2,0. Wanneer een jongen van 13 jaar hoger dan 9,94 scoort is er sprake van een **hoge score**.

Uit de onderzochte groep worden willekeurig twee jongens van 13 jaar gekozen.

4p **7** Bereken de kans dat ze allebei een hoge score hebben.

Voor Canadese jongens van 14 jaar is het gemiddelde 8,0 en de standaardafwijking 2,0.

We kiezen aselekt 100 Canadese jongens van 14 jaar.

4p **8** Bereken de kans dat hun gemiddelde score minder dan 0,1 afwijkt van 8,0.

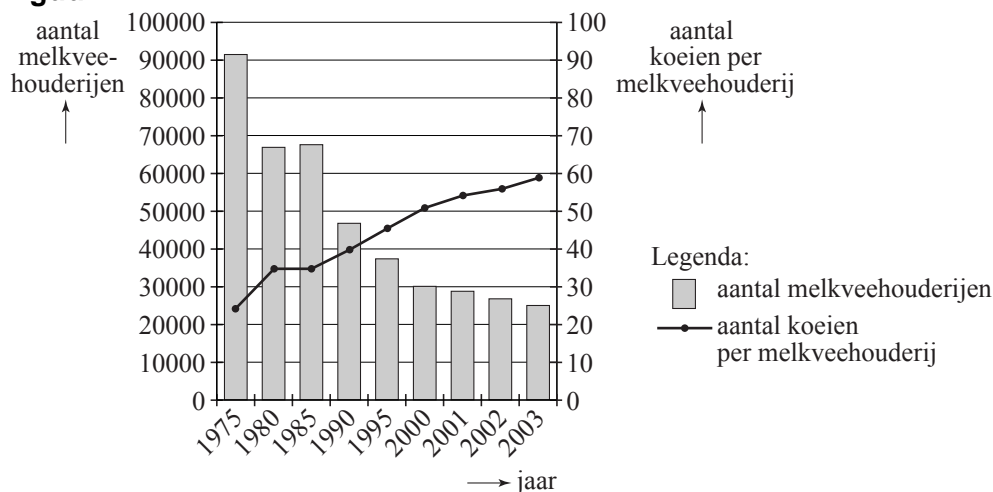
Voor Canadese jongens van 12 jaar is de gemiddelde score 7,3. Verder is uit het onderzoek gebleken dat 77% van de jongens van 12 jaar een score had die lager was dan 8,85.

- 4p **9** Bereken de standaardafwijking van de scores van de Canadese jongens van 12 jaar.

Melkvee

De afgelopen jaren is het aantal melkveehouderijen afgenomen. Het (gemiddelde) aantal koeien per melkveehouderij is echter toegenomen. Beide ontwikkelingen zijn weergegeven in figuur 1. Figuur 1 is gebaseerd op gegevens van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS).

figuur 1



Op basis van de gegevens in figuur 1 kan worden onderzocht of het totale aantal koeien in Nederland in 2003 groter of kleiner was dan in 1975.

4p **10** Voer dat onderzoek uit aan de hand van een berekening.

In figuur 1 is te zien dat de grafiek van het aantal koeien per melkveehouderij in de periode 2000 – 2003 minder steil loopt dan in de periode 1985 – 2000. Toch is de gemiddelde jaarlijkse toename van het aantal koeien per melkveehouderij groter in de periode 2000 – 2003 dan in de periode 1985 – 2000.

3p **11** Laat dit met een berekening zien en leg uit waarom dit niet in tegenspraak is met de gegevens in de grafiek van het aantal koeien per melkveehouderij.

Koeien worden tegenwoordig gemolken door een zogenaamde melkrobot. De melkrobot melkt de koe zonder dat de boer daarbij aanwezig hoeft te zijn. In 2005 werd door de dierenbescherming het volgende persbericht gepubliceerd:

persbericht

“In 2002 bleef 10% van de melkveestapel in de stal. De melkrobot heeft tot gevolg dat er steeds minder koeien in de wei komen. De dierenbescherming is daarom tegenstander van melkrobots.

Dit jaar (2005 dus) blijft maar liefst 17% van de melkveestapel het hele jaar in de stal. Daardoor blijven de weilanden leeg. Als deze trend zich doorzet, verwachten wij dat over zo'n tien jaar de helft van de melkveestapel uit het Nederlandse landschap is verdwenen.”

Uit het persbericht blijkt dat 90% van het melkvee in 2002 in de wei komt. Ook zien we dat in 2005 nog slechts 83% van het melkvee in de wei komt.

In het persbericht is sprake van een 'trend', maar het wordt niet duidelijk van welk model men daarbij is uitgegaan en waar "de helft van de melkveestapel" vandaan komt. Enkele voor de hand liggende modellen zijn:

1. een trend waarbij het percentage melkvee dat in de wei komt lineair daalt;
2. een trend waarbij het percentage melkvee dat in de wei komt exponentieel afneemt.

- 4p **12** Bereken hoeveel procent van het melkvee in 2015 volgens model 1 en hoeveel procent volgens model 2 in de wei komt.

Voor het beschrijven van de situatie op de lange duur is model 1 op grond van wiskundige overwegingen niet bruikbaar maar model 2 misschien wel.

- 2p **13** Leg uit waarom model 1 op de lange duur zeker niet realistisch kan zijn, maar model 2 misschien wel.

Boer Poelen vraagt zich af of het voordelig is een melkrobot aan te schaffen. De verkoopprijs van de melk is op dat moment 30 eurocent per liter. We gaan ervan uit dat de melkprijs niet verandert. Hij heeft op zijn boerderij 70 koeien die elke dag gemolken moeten worden. Een koe geeft gemiddeld 21,1 liter melk per dag als zij door de boer met de hand gemolken wordt. Uit onderzoek blijkt dat een koe die gemolken wordt door een melkrobot 10% meer melk geeft dan een koe die met de hand wordt gemolken door de boer. Boer Poelen wil weten hoeveel extra opbrengst hij per jaar (365 dagen) krijgt uit de verkoop van melk als hij overstapt op een melkrobot.

- 3p **14** Bereken de extra opbrengst per jaar van boer Poelen. Rond je antwoord af op hele euro's.

Een meisje of een jongen?

Veel vrouwen die in verwachting zijn van een baby vragen zich af of het een meisje of een jongen wordt. Er bestaan veel dubieuze methoden om daarachter te komen. Een voorbeeld daarvan is de al eeuwen oude Chinese conceptietabel, zie tabel 1.

tabel 1

	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
Jan	M	J	M	J	M	J	M	M	J	M	J	M	J	J	J	M	J	J	M	J	M	J	M	J	M	J	J	M
Febr	J	M	J	M	J	J	M	J	M	J	M	J	M	M	M	J	M	J	J	M	J	M	J	M	J	M	J	J
Maart	M	J	M	M	J	M	J	J	J	M	J	M	M	J	J	J	J	M	J	J	M	J	M	J	M	J	M	J
April	J	M	J	M	M	J	J	M	M	J	M	M	M	M	M	J	M	J	M	J	J	J	J	M	J	M	J	M
Mei	J	M	J	M	J	J	M	M	M	M	M	J	M	M	M	M	M	M	J	M	J	J	M	J	M	J	J	M
Juni	J	J	J	M	M	M	J	J	J	M	M	J	M	M	M	M	M	M	M	J	M	M	J	M	J	M	J	M
Juli	J	J	J	M	M	J	J	M	M	J	J	J	M	M	M	M	M	M	M	M	J	M	J	J	M	J	M	J
Aug	J	J	J	M	J	M	M	J	J	J	J	J	M	M	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	J	M
Sept	J	J	J	M	M	J	M	J	M	J	J	J	M	M	M	M	M	M	J	M	J	M	J	M	J	J	M	J
Okt	J	J	M	M	M	J	M	J	M	J	J	M	M	M	M	M	M	M	J	J	M	J	M	J	M	J	J	M
Nov	J	M	J	M	M	J	M	J	M	M	M	M	J	M	M	M	J	J	J	M	J	M	J	M	J	J	M	J
Dec	J	M	J	M	M	M	M	J	M	J	M	M	J	J	J	J	J	J	J	J	M	M	M	J	M	J	M	J

Met deze tabel zou je als volgt kunnen bepalen of het een jongen of een meisje wordt: kies de maand van de conceptie (verticaal) en de leeftijd van de moeder (horizontaal) op het moment van de conceptie. In het bijbehorende vakje staat de M voor een meisje en de J voor een jongen. Volgens een website voorspelt de tabel in 90% van de gevallen correct of het een jongen of een meisje wordt.

Twee zwangere vrouwen hebben nauwkeurig het moment van conceptie vastgesteld. Voor de ene vrouw was dat in de maand maart en haar leeftijd was toen 23 jaar. Voor de andere vrouw was dat in februari en haar leeftijd was toen 25 jaar. De twee vrouwen gebruiken de Chinese conceptietabel om het geslacht van hun baby te voorspellen. Ga ervan uit dat de tabel inderdaad in 90% van de gevallen correct voorspelt.

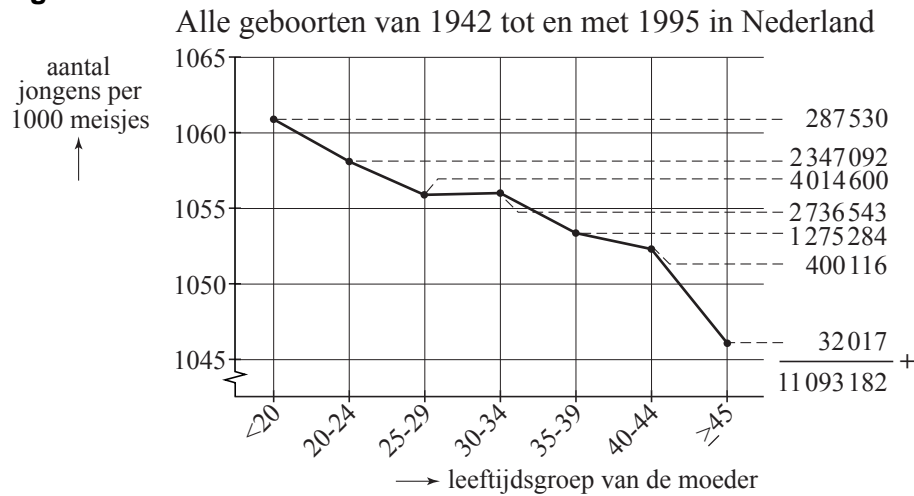
3p **15** Bereken dan de kans dat de baby's alletwee jongens zijn.

Een vrouw die gedurende haar leven vijf kinderen heeft gekregen onderzoekt of de Chinese conceptietabel klopt voor haar vijf kinderen. In een discussieforum op internet klaagt de vrouw erover dat de Chinese conceptietabel het bij alle vijf haar kinderen mis had. Als de 90%-claim van de website correct is, zo redeneerde de vrouw, dan zou er een behoorlijk grote kans moeten zijn dat de tabel het bij ten minste vier van de vijf kinderen goed zou hebben.

4p **16** Bereken deze kans.

Er bestaat een verband tussen het geslacht van de baby en de leeftijd van de moeder op het moment van de geboorte van het kind. In figuur 1 is het aantal jongens per 1000 meisjes uitgezet tegen de leeftijd van de moeder.

figuur 1



De grafiek in figuur 1 is het resultaat van een groot onderzoek waarin in totaal 11 093 182 geboortes werden geteld. We kijken in deze figuur bijvoorbeeld naar de leeftijdsklasse 20-24 jaar. We zien dat van de baby's van wie de moeder bij de geboorte in deze leeftijdsklasse zit, er ongeveer 1058 jongetjes per 1000 meisjes worden geboren. De kans op een jongen is voor een willekeurige aanstaande moeder uit deze leeftijdsklasse dus $\frac{1058}{2058} \approx 0,514$.

De grafiek in figuur 1 daalt (bijna) overal. Dat betekent dat de verhouding tussen de aantallen jongens en meisjes (dus jongens : meisjes) (bijna) altijd afneemt naarmate de leeftijd van de moeder toeneemt. Dus is de kans op een jongen voor een zwangere vrouw van 45 jaar of ouder kleiner dan voor een zwangere vrouw die jonger is dan 20 jaar. Omdat de grafiek in figuur 1 snel daalt, lijkt het er op alsof het verschil tussen beide kansen groot is.

- 5p **17** Laat met een berekening zien dat het verschil tussen beide genoemde kansen klein is. Leg ook uit waarom figuur 1 de indruk wekt dat dit verschil groot is.

Het getal 2 347 092 in figuur 1 helemaal rechts geeft aan dat er 2 347 092 kinderen zijn geboren van wie de moeder bij de geboorte van het kind in de leeftijdsklasse 20-24 jaar zit. Met behulp van bovengenoemde verhouding $\frac{1058}{2058}$

kunnen we het aantal jongens in die groep berekenen.

Door alle gegevens uit figuur 1 te gebruiken, kunnen we ook de verhouding jongens : meisjes in de gehele onderzochte groep van 11 093 182 kinderen berekenen. Deze verhouding is (ongeveer) 1056 : 1000.

- 5p **18** Laat deze berekening zien.

Studieschuld

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) houdt bij hoeveel studenten er zijn in het wetenschappelijk onderwijs in Nederland. Tabel 1 geeft daar informatie over.

tabel 1

studiejaar	mannen	vrouwen
1991-1992	98272	75281
1992-1993	97784	76739
1993-1994	97270	78052
1994-1995	95256	78372
1995-1996	91310	75959
1996-1997	83850	70226
1997-1998	80472	68014
1998-1999	79347	68524
1999-2000	80113	70631

Iemand trekt uit tabel 1 de volgende twee conclusies:

- 1 Het aantal vrouwelijke studenten was in het studiejaar 1999-2000 ruim 6 procent lager dan in het studiejaar 1991-1992.
- 2 Het aandeel van de vrouwelijke studenten was in het studiejaar 1999-2000 groter dan in het studiejaar 1991-1992.

4p **19** Onderzoek voor elk van deze conclusies of deze juist is of niet.

Lenneke was een van die studenten. Zij heeft haar studie psychologie in september 2002 succesvol afgerond. Tijdens haar studie heeft zij geld geleend van de IBG (Informatie Beheer Groep). In de loop van 2004 kreeg zij van de IBG het zogenoemde Bericht Terugbetalen. Daaruit komt het volgende citaat.

citaat

Geachte mevrouw,

Volgens onze gegevens moet u per 1 januari 2005 beginnen met de terugbetaling van uw studieschuld. Op 1 januari 2005 bedraagt deze schuld 3011 euro.

U kunt uw schuld ineens betalen, maar u mag dit ook in maandelijkse termijnen doen. In uw situatie is deze maandelijkse termijn vastgesteld op 45,41 euro en dit bedrag zal op de laatste dag van iedere maand van uw rekening worden afgeschreven.

Bij het terugbetalen berekent de IBG een rente van 3,73% op jaarbasis over de schuld die overblijft.

Een rente van 3,73% per jaar betekent een rente van (ongeveer) 0,3% per maand.

4p **20** Laat met behulp van een berekening zien dat dit klopt.

Lenneke besloot destijds om vanaf januari 2005 elke maand 45,41 euro af te lossen. De hoogte van haar schuld S_n na n maanden voldoet dus aan de volgende recurrente betrekking¹⁾:

$$S_{n+1} = 1,003 \cdot S_n - 45,41 \text{ met } S_0 = 3011$$

Bij de Oudejaarsloterij van december 2005 wint Lenneke 2500 euro. Zij besluit dit bedrag op 1 januari 2006 voor haar aflossing te gebruiken.

- 4p **21** Heeft Lenneke op 2 januari 2006 nog schulden bij de IBG? Licht je antwoord met een berekening toe.

De schuld van Lenneke is ontstaan in de periode van begin september 2001 tot en met eind september 2002. Tijdens deze 13 maanden leende zij elke maand een bedrag van 211,09 euro.

De IBG hanteert de regel dat een schuld pas na enkele jaren hoeft te worden afgelost. Maar tot het begin van het aflossen (de aanloopfase) moet er wel elke maand rente worden betaald. Deze rente wordt aan de schuld toegevoegd. Tijdens de jaren 2001 en 2002 berekende de IBG over de schuld een rente van 0,3% per maand, steeds ingaande in de maand **nadat** de bedragen waren uitgekeerd. Dat betekent dus dat op 31 oktober 2001 voor het eerst rente werd berekend.

Op 1 oktober 2002, toen Lenneke net was gestopt met lenen, bedroeg de studieschuld van Lenneke:

$$211,09 + 211,09 \cdot 1,003 + 211,09 \cdot 1,003^2 + \dots \approx 2794,11 \text{ euro.}$$

- 4p **22** Toon met de somformule voor meetkundige rijen aan dat dit bedrag van 2794,11 euro klopt.

noot 1 Een recurrente betrekking wordt ook wel recursieformule of recursievergelijking genoemd.