Examen VWO

2009

tijdvak 1
maandag 25 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A1

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

925-0141-a-VW-1-o

Emissierechten

Om de uitstoot van kooldioxide (CO_2) onder controle te krijgen verdeelt de overheid elk jaar zogenoemde emissierechten onder bedrijven die CO_2 uitstoten. Eén **emissierecht** betekent dat een bedrijf het recht heeft om in een jaar één ton CO_2 uit te stoten.

In 2005 stootte de Nederlandse industrie 80,4 miljoen ton CO_2 uit. Dat was 8 procent minder dan ze van de overheid aan emissierechten had gekregen.

3p **1** Bereken hoeveel emissierechten de overheid in 2005 had verdeeld onder de Nederlandse industrie.

Wanneer een bedrijf meer emissierechten heeft dan het aan CO_2 uitstoot, kan het de overgebleven rechten verkopen aan een bedrijf dat nog emissierechten nodig heeft. Deze handel in emissierechten vindt plaats op de Amsterdamse klimaatbeurs ECX.
Aan de hand van een voorbeeld gaan we in de rest van deze opgave na wat de handel in emissierechten voor een bedrijf kan betekenen.

Het bedrijf Fychem stoot per jaar 100 000 ton CO_2 uit en beschikt over slechts 95 000 emissierechten. We onderzoeken de volgende twee mogelijkheden:

- mogelijkheid 1: het bedrijf koopt er 5000 emissierechten bij;
- mogelijkheid 2: het bedrijf neemt maatregelen om de uitstoot tot 90 000 ton CO_2 terug te brengen. Dit kost het bedrijf 60 000 euro. Het bedrijf houdt nu 5000 emissierechten over en verkoopt die op de beurs.

We gaan ervan uit dat de koopprijs en de verkoopprijs van een emissierecht even groot zijn en noemen dat de **prijs** van een emissierecht. Afhankelijk van de prijs van een emissierecht kun je uitrekenen welke van de twee mogelijkheden het voordeligst is voor Fychem.

Neem aan dat de prijs van een emissierecht gelijk is aan 10 euro.

3p **2** Onderzoek welke mogelijkheid voor Fychem het voordeligst is.

De prijs van een emissierecht op de klimaatbeurs varieert. Bij een andere prijs dan 10 euro moet opnieuw bekeken worden welke van de twee mogelijkheden het voordeligst is voor Fychem. Er is een prijs waarbij het voor Fychem niet uitmaakt welke van de twee genoemde mogelijkheden wordt gekozen.

4p **3** Bereken in dat geval de prijs van een emissierecht.

De kosten om de uitstoot van CO_2 te verminderen hangen af van de hoeveelheid waarmee de uitstoot wordt verminderd. Voor Fychem geldt de volgende formule:

$$K(x) = \frac{540x}{100\,000 - x}$$

In deze formule stelt K de kosten voor in duizenden euro's en x het aantal ton waarmee de CO_2-uitstoot wordt verminderd.

Hoe meer Fychem de uitstoot van CO_2 vermindert, des te meer kosten zal het bedrijf hiervoor moeten maken.

4p **4** Beredeneer dit aan de hand van de formule voor K zonder getallenvoorbeelden te geven.

Wanneer Fychem veel investeert in het verminderen van de uitstoot van CO_2, kan het bedrijf de overtollige emissierechten verkopen op de klimaatbeurs. Voor de winst die Fychem zo kan behalen geldt de formule:

$$W = 0{,}001 \cdot p \cdot (x - 5000) - \frac{540x}{100\,000 - x}$$

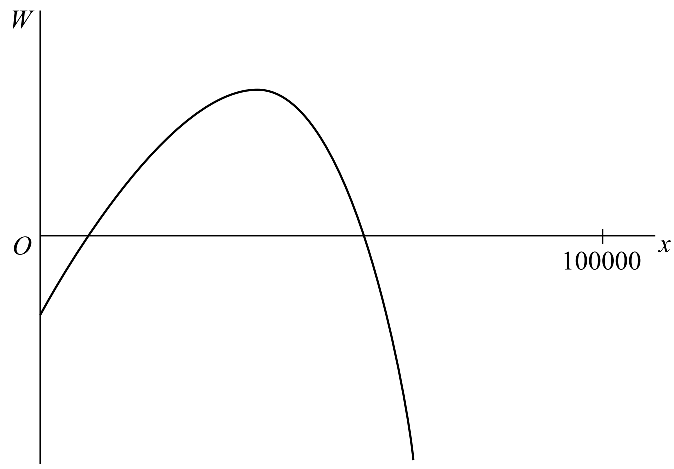
In deze formule is W de winst van Fychem in duizenden euro's, p de prijs van een emissierecht in euro's en x het aantal ton waarmee de CO_2-uitstoot van Fychem wordt verminderd.

Bij een prijs van een emissierecht van 14 euro kan het verband tussen W en x geschreven worden als $W = 0{,}014x - 70 - \dfrac{540x}{100\,000 - x}$.

3p **5** Toon aan dat dit het geval is.

In figuur 1 is het verband tussen W en x bij een prijs van een emissierecht van 14 euro grafisch weergegeven.

figuur 1



Je ziet dat de grafiek een maximum heeft.

3p **6** Bereken de maximale winst die Fychem bij een prijs van een emissierecht van 14 euro kan maken.

Nominaal volume

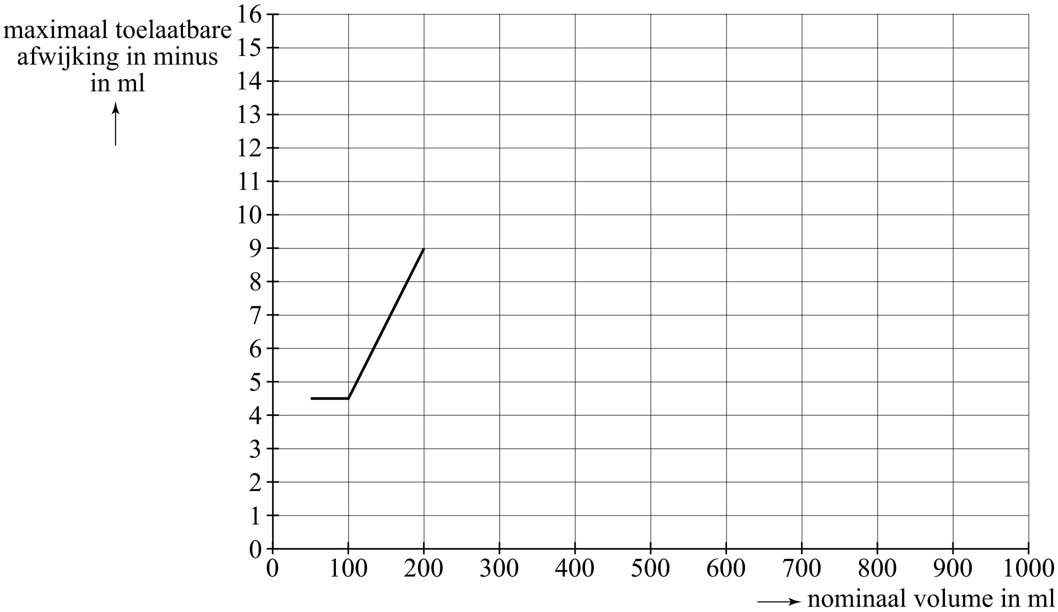
Veel vloeistoffen worden verhandeld in flessen. De hoeveelheid vloeistof die volgens het etiket in de fles moet zitten, heet het **nominaal volume**. Als er bijvoorbeeld "400 ml ℮" op staat, dan is het nominaal volume 400 ml. Dat betekent niet dat er dan ook altijd precies 400 ml vloeistof in zit. De werkelijke hoeveelheid vloeistof in de fles zou bijvoorbeeld 401,8 ml kunnen zijn of 399,6 ml. Als de werkelijke hoeveelheid vloeistof minder is dan het nominaal volume, dan spreken we van een **afwijking in minus**. De afwijking in minus mag niet te groot zijn. Daar zijn Europese richtlijnen voor. In tabel 1 is voor volumes tussen 50 ml en 1000 ml de maximaal toelaatbare afwijking in minus weergegeven volgens de Europese richtlijn.

tabel 1

	max. toelaatbare afwijking in minus	
nominaal volume in ml	**in % van het nominaal volume**	**in ml**
50 tot 100	-	4,5
100 tot 200	4,5	-
200 tot 300	-	9
300 tot 500	3	-
500 tot 1000	-	15

Aan de hand van tabel 1 kan een grafiek worden gemaakt van het verband tussen het nominaal volume en de maximaal toelaatbare afwijking in minus. In figuur 1 is daar al een begin mee gemaakt.

figuur 1



De grafiek in figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

4p **7** Maak de grafiek af op de uitwerkbijlage.

Flessen heten **ondeugdelijk** als de afwijking in minus groter is dan de maximaal toelaatbare afwijking in minus.

Een firma produceert hoestsiroop. Volgens het etiket bevat een fles hoestsiroop 400 ml, dus het nominaal volume is 400 ml. De maximaal toelaatbare afwijking in minus is dan 12 ml.
De werkelijke hoeveelheid hoestsiroop per fles is normaal verdeeld met een gemiddelde van 405 ml. Uit onderzoek is gebleken dat per 1000 flessen hoestsiroop gemiddeld 5,2 flessen ondeugdelijk zijn. Met behulp van deze gegevens kan worden berekend dat de standaardafwijking van de werkelijke hoeveelheid hoestsiroop per fles ongeveer gelijk is aan 6,6 ml.

5p **8** Bereken de standaardafwijking van de werkelijke hoeveelheid hoestsiroop per fles in twee decimalen nauwkeurig.

De firma levert een partij van 5000 flessen hoestsiroop aan een apotheek.
4p **9** Bereken het verwachte aantal flessen in deze partij dat een afwijking in minus heeft.

De overheid controleert regelmatig partijen flessen om te zien of er niet te veel ondeugdelijke flessen tussen zitten. In tabel 2 staan de Europese richtlijnen voor zulke controles.

tabel 2

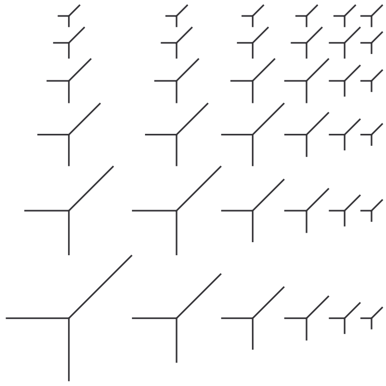
grootte van de partij (aantal flessen)	grootte van de steekproef	goedkeur-criterium	afkeur-criterium
100 t/m 150	20	≤1	≥2
151 t/m 280	32	≤2	≥3
281 t/m 500	50	≤3	≥4
501 t/m 1200	80	≤5	≥6
1201 t/m 3200	125	≤7	≥8
3201 en meer	200	≤10	≥11

In tabel 2 zien we dat voor een partij van bijvoorbeeld 200 flessen er een steekproef van 32 flessen genomen moet worden. Deze partij wordt goedgekeurd als er in de steekproef niet meer dan 2 flessen ondeugdelijk zijn en afgekeurd bij 3 of meer ondeugdelijke flessen.

Door problemen met de productie is gedurende een periode 6% van de flessen ondeugdelijk. Tijdens deze periode wordt een partij van 5000 flessen gecontroleerd volgens de richtlijnen in tabel 2. De firma hoopt natuurlijk dat de partij wordt goedgekeurd.
4p **10** Bereken de kans dat dit gebeurt.

Regelmaat

figuur 1



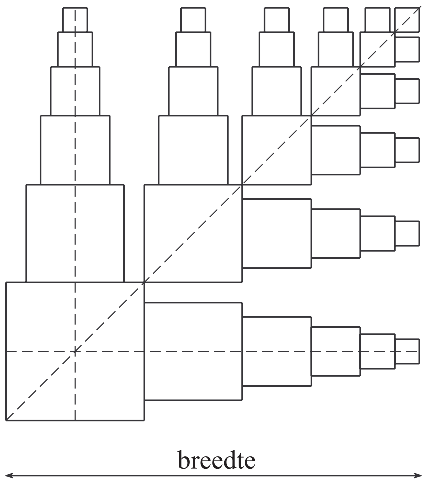
De Duitse kunstenaar Alfons Kunen heeft als voorstudie voor kunstwerken met het thema “geconstrueerde groei” het patroon van figuur 1 getekend.

Alle figuurtjes in figuur 1 hebben dezelfde vorm. Het figuurtje linksonder is het grootst. Uitgaande van dit figuurtje worden in horizontale, verticale en diagonale richting de figuurtjes steeds kleiner volgens een vaste regelmaat.
We kijken hiervoor naar de onderste rij. Het langste lijnstukje van het grootste figuurtje is in werkelijkheid 78 mm. Het overeenkomstige lijnstukje in het figuurtje direct rechts hiervan is 0,71 keer zo groot, dus in werkelijkheid ongeveer 55 mm. Er geldt de volgende regelmaat: als je één figuurtje naar rechts gaat, worden de afmetingen met 0,71 vermenigvuldigd.
Deze regelmaat kan natuurlijk verder naar rechts worden voortgezet. Op den duur worden de figuurtjes in de rij te klein om nog te kunnen tekenen.

4p **11** Bereken hoeveel figuurtjes er in deze rij zijn waarvan het langste lijnstukje in werkelijkheid langer is dan 2 mm.

Als basis voor het patroon van figuur 1 heeft de kunstenaar een rooster gebruikt van steeds kleiner wordende vierkanten. Zo’n rooster noemen we een **basisrooster**. Zie figuur 2.

figuur 2



De lengte van de zijden van de vierkanten neemt op dezelfde wijze af als bij de figuurtjes in figuur 1: de lengte van de zijden wordt telkens met 0,71 vermenigvuldigd.
Die vermenigvuldigingsfactor 0,71 is afgerond. Kunen heeft ervoor gezorgd dat de oppervlakte van elk nieuw vierkant in een horizontale rij steeds de helft is van die van het vorige vierkant. Met behulp van deze voorwaarde is de vermenigvuldigingsfactor nauwkeuriger te berekenen.

4p **12** Bereken de vermenigvuldigingsfactor in vier decimalen nauwkeurig.

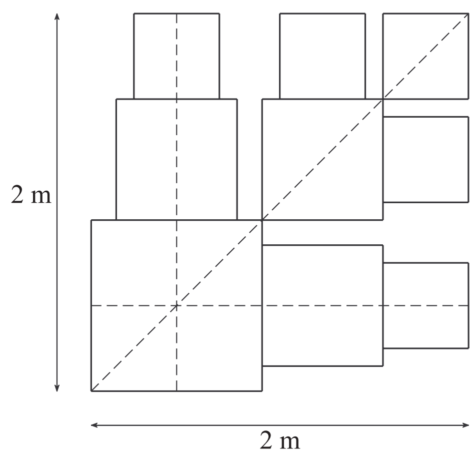
We bekijken nu een basisrooster waarbij het grootste vierkant een zijde van z mm heeft. In figuur 2 is aangegeven wat met de totale breedte van een basisrooster bedoeld wordt.
Voor de totale breedte B (in mm) van een basisrooster van n bij n vierkanten geldt de formule $B = z + z \cdot 0,71 + z \cdot 0,71^2 + \ldots + z \cdot 0,71^{n-1}$.
Hierin is z de lengte (in mm) van de zijde van het grootste vierkant.
Deze formule kan voor elke waarde van z worden geschreven als:

$$B = z \cdot \frac{1 - 0,71^n}{0,29}$$

3p **13** Leg uit dat de formule $B = z \cdot \dfrac{1 - 0,71^n}{0,29}$ inderdaad correct is.

Met een basisrooster van 3 bij 3 vierkanten wil men een Kunen-kunstwerk aanbrengen op de buitenmuur van een gebouw. Voor het kunstwerk is een stuk muur van 2 bij 2 meter beschikbaar. Men wil dit stuk helemaal gebruiken, dus het basisrooster moet precies 2 bij 2 meter zijn. Zie figuur 3.

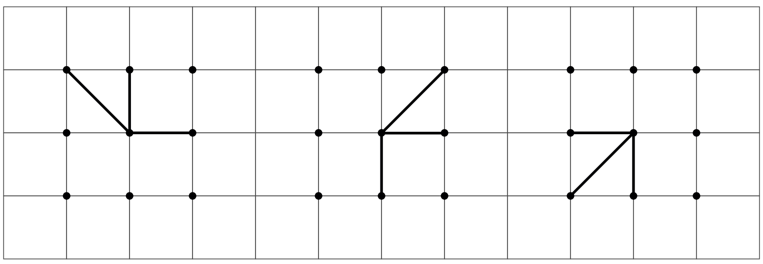
figuur 3



3p **14** Bereken de afmetingen van het grootste vierkant in dit basisrooster. Rond je antwoord af op hele mm.

Er kunnen allerlei figuurtjes in de vierkanten van het basisrooster getekend worden. Een mogelijkheid om zulke figuurtjes te maken is de volgende: zet in een vierkant van het basisrooster negen punten: één punt in het midden, vier punten op de hoeken en vier op de middens van de zijden. Trek nu vanuit het middelste punt lijnstukjes naar drie andere punten. In figuur 4 zijn drie verschillende figuurtjes te zien die op deze manier gemaakt zijn.

figuur 4



Er zijn echter nog veel meer figuurtjes te maken door het middelste punt met drie andere punten te verbinden. Als extra voorwaarde wordt gesteld dat er in een dergelijk figuurtje precies één diagonaal lijnstukje moet voorkomen. Bij de figuurtjes in figuur 4 is dit overigens ook al het geval.

4p **15** Hoeveel verschillende figuurtjes kunnen er dan getekend worden? Licht je antwoord toe.

Fouten

Overal waar tekst verwerkt wordt, worden fouten gemaakt. Het gaat dan om slecht lopende zinnen, spelfouten, typefouten, enzovoort. Het is vrijwel onmogelijk om er voor te zorgen dat in lange teksten zoals een boek, krant of tijdschrift geen enkele fout voorkomt. Een manier om het aantal fouten te verminderen is de tekst te laten controleren door een zogenoemde **screener**. Een screener is iemand die fouten in een tekst probeert te ontdekken. Ook screeners kunnen fouten over het hoofd zien. In deze opgave bekijken we een model waarin fouten in teksten met een bepaalde kans worden ontdekt.

Screener Chris heeft al vaak teksten gecontroleerd. De kans dat een fout in de tekst door hem wordt ontdekt is gelijk aan 0,8. Deze kans geldt voor elke fout in de tekst. We noteren deze kans als p_C, dus: $p_C = 0{,}8$.

Veronderstel dat er in een tekst 52 fouten zitten.

4p **16** Bereken de kans dat screener Chris minstens 40 van de 52 fouten ontdekt.

De screeners Chris en Dieuwke controleren volkomen onafhankelijk van elkaar een tekst waarin 375 fouten zitten. Dieuwke heeft iets minder ervaring dan Chris. De kans p_D dat een fout in de tekst door haar wordt ontdekt is 0,72, dus voor Dieuwke geldt $p_D = 0{,}72$. Voor Chris geldt weer $p_C = 0{,}8$.

3p **17** Bereken hoeveel fouten naar verwachting zowel door Chris als ook door Dieuwke zullen worden gevonden.

Een document bevat 64 fouten. Omdat het een belangrijk document is maakt men gebruik van vier goede screeners, die volkomen onafhankelijk van elkaar de tekst controleren. De kans dat een van deze screeners een fout over het hoofd ziet, is voor iedere screener voor elke fout gelijk aan 0,15.

4p **18** Bereken de kans dat alle 64 fouten worden ontdekt.

Bij het screenen van een tekst is vooraf natuurlijk niet bekend hoeveel fouten er in voorkomen. Ook is niet altijd bekend hoe groot de kans is dat een fout door een screener wordt ontdekt. De wiskundige Polya vroeg zich af of je na screening van een tekst kunt weten hoeveel fouten er naar verwachting nog in de tekst zitten. Polya bedacht dat je daar achter kunt komen door twee screeners in te schakelen. Hij nam daarbij aan dat de screeners onafhankelijk van elkaar een fout wel of niet ontdekken.
Elke screener maakt een lijst van de door hem ontdekte fouten. Daaruit kan een lijst worden gemaakt van de gemeenschappelijk gevonden fouten. Dat zijn de fouten die de screeners allebei hebben ontdekt. Niet-ontdekte fouten zijn fouten die door geen van beide screeners zijn ontdekt.

Polya heeft hiervoor de volgende formule opgesteld:

$$\text{het verwachte aantal niet-ontdekte fouten} = \frac{(N_A - N_G)\cdot(N_B - N_G)}{N_G}$$

In deze formule is:
N_A = het aantal fouten dat door screener A is gevonden,
N_B = het aantal fouten dat door screener B is gevonden
en
N_G = het aantal gemeenschappelijk gevonden fouten.

We bekijken nu de volgende situatie: in een tekst heeft screener A een aantal fouten gevonden. Screener B heeft alle fouten gevonden die A al gevonden had, plus nog een aantal extra fouten.

3p **19** Leg uit dat in deze situatie het verwachte aantal niet-ontdekte fouten volgens de formule nul is.

De screeners Frits en Laura controleren een tekst. Frits vindt 90 fouten en Laura vindt 88 fouten. Het aantal gemeenschappelijk gevonden fouten is 66. Nu kan met behulp van de formule van Polya het verwachte aantal fouten in de tekst berekend worden.

4p **20** Bereken op grond van de resultaten van de screening het totaal aantal fouten dat naar verwachting in de tekst zit.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Wedden

Via internet kun je tegenwoordig bij verschillende bookmakers terecht om te wedden op de uitslag van een sportwedstrijd. Aan de hand van een voetbalwedstrijd laten we zien hoe dat in zijn werk gaat.
De informatie die een bookmaker verstrekte voor de voetbalwedstrijd Ajax – Vitesse van 27 januari 2007 zag er als volgt uit:

tabel 1

Wedstrijd: **Ajax – Vitesse**	Uitkering per ingezette euro
Bij winst voor Ajax	€ 1,75
Bij gelijkspel	€ 3,10
Bij verlies van Ajax	€ 4,10

De getallen 1,75; 3,10 en 4,10 heten de **quotes** van deze weddenschap. Uiteraard kun je meer dan 1 euro inzetten, maar de inzet moet wel altijd een geheel aantal euro's zijn.

De bookmaker stelt bij elke wedstrijd opnieuw de quotes van tevoren vast en maakt deze op internet bekend. Vervolgens kunnen gokkers geld inzetten op een bepaalde uitslag. Hoeveel geld een gokker wint of verliest hangt dan alleen nog af van de uitslag van de wedstrijd.
Stel dat een supporter van Ajax € 45 op winst voor Ajax inzet. Als Ajax ook daadwerkelijk wint, zal de supporter $45 \cdot 1{,}75 - 45 = 33{,}75$ euro winst maken.
Bij elke andere uitslag zal hij € 45 verlies hebben.
De supporter besluit om zijn kansen te spreiden door € 25 in te zetten op winst voor Ajax, € 15 op gelijkspel en € 5 op verlies van Ajax.

4p **21** Bereken met de quotes van tabel 1 welke uitslag − winst voor Ajax, gelijkspel of verlies van Ajax − bij deze inzet financieel het beste uitpakt voor deze supporter.

Veronderstel dat de quotes voor een andere wedstrijd als volgt zouden zijn: 1,50; 5,90 en 8,30 voor respectievelijk winst, gelijkspel en verlies. Charles zet in totaal € 45 in. Hij kan die € 45 zo verdelen over de drie uitslagen (winst, gelijkspel of verlies) dat hij altijd winst maakt, ongeacht de uitslag van de wedstrijd.

4p **22** Hoe moet Charles die € 45 dan verdelen? Licht je antwoord toe.

In de praktijk komt de situatie van Charles natuurlijk nooit voor. Bookmakers kiezen de quotes namelijk zodanig dat zoiets niet kan gebeuren.