

Examen VWO

2008

tijdvak 1
maandag 19 mei
totale examentijd 3 uur

wiskunde A1,2 Complex

Vragen 11 tot en met 17

**In dit deel van het examen staan de vragen
waarbij de computer wel wordt gebruikt.**

Bij dit deel van het examen hoort een uitwerkbijlage.

Het gehele examen bestaat uit 17 vragen.

Voor dit deel van het examen zijn maximaal 33 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Tijdens dit examen werk je in Excel. Door in het openingsscherm op **Excel werkbladen** te klikken start Excel automatisch op. Je komt dan meteen in het eerste werkblad dat hoort bij het eerste deel van de eerste opgave. Om naar een ander werkblad te gaan moet je op de tabs onder aan je scherm klikken. Je kunt tijdens dit gedeelte van het examen gemakkelijk van werkblad wisselen door op de tabs te klikken. Wanneer je Excel afsluit wordt alles wat je hebt gemaakt **niet** opgeslagen. Sluit dus pas af als je helemaal klaar bent. Mocht je per ongeluk Excel toch hebben afgesloten dan kun je altijd Excel weer opstarten. Je begint dan weer met de oorspronkelijke situatie.

Inkomstenbelasting

In veel landen betalen burgers inkomstenbelasting volgens een **progressief** belastingtarief: hoe meer je verdient, hoe hoger het belastingpercentage. Dit geldt ook voor Nederland.

De berekening van de inkomstenbelasting in Nederland is nogal ingewikkeld. In deze opgave wordt gewerkt met een vereenvoudigde versie van het Nederlandse belastingstelsel. Dit vereenvoudigde stelsel werkt als volgt: Eerst wordt van iedereen jaarlijks het belastbaar inkomen vastgesteld. Daarover wordt belasting geheven volgens een schijventarief. Deze tariefstructuur is weergegeven in tabel 2.

tabel 2

schijf	gedeelte van het belastbaar inkomen	belastingpercentage over dat gedeelte
1e schijf	de eerste 5000 euro	0%
2e schijf	de volgende 10 000 euro	30%
3e schijf	de volgende 15 000 euro	35%
4e schijf	de volgende 20 000 euro	40%
5e schijf	de rest	50%

Als iemand bijvoorbeeld een belastbaar inkomen heeft van 44 000 euro, dan bedraagt de te betalen inkomstenbelasting 0% van 5000 plus 30% van 10 000 plus 35% van 15 000 plus 40% van 14 000. In totaal betaalt hij dus 13 850 euro aan belasting. In dit voorbeeld betaalt deze persoon totaal bijna 31,5% belasting over zijn belastbaar inkomen.

 *Klik in het openingsscherm op **Excel werkbladen**. Je komt nu in het werkblad **Belastingberekening**.*

Je ziet hier een tabel waarin voor verschillende inkomens de hoogte van de belasting berekend is. De gegevens van het voorbeeld hierboven vind je in rij 89.

Het kan gebeuren dat de inkomstenbelasting die iemand moet betalen precies 40% van zijn belastbaar inkomen is. Om te onderzoeken bij welk belastbaar inkomen dit het geval is, kun je in kolom G het percentage van het belastbaar inkomen uitrekenen dat aan belasting moet worden betaald.

- 4p 11 Onderzoek op deze manier hoe hoog het belastbaar inkomen in dit geval moet zijn. Licht je werkwijze toe.

De hoogte van de belasting werd in Excel berekend met behulp van een tabel. De hoogte van de belasting kan ook worden berekend met behulp van formules. Zo geldt voor belastbare inkomens tussen de 15 000 en 30 000 euro de formule $B = 3000 + 0,35 \cdot (x - 15000)$. Hierin is B de hoogte van de belasting en x het belastbaar inkomen, beide in euro's. Voor belastbare inkomens tussen de 30 000 en 50 000 euro geldt een andere maar vergelijkbare formule.

- 4p 12 Stel deze formule op. Leg uit hoe je te werk bent gegaan.

Het belastbaar inkomen wordt vastgesteld door het bruto inkomen (alles wat iemand in een jaar verdient heeft) te verminderen met eventuele aftrekposten (bijvoorbeeld hypotheekrente).

Sommige belastingdeskundigen beweren: 'De mensen met de hoogste inkomens kunnen doorgaans de hoogste bedragen aftrekken. Daardoor blijft er van de progressiviteit niet veel meer over.'

Zij pleiten daarom voor de invoering van een zogenaamde 'vlaktaks' die inhoudt dat:

- bij de berekening van de belasting geen rekening wordt gehouden met aftrekposten. De belasting wordt dus berekend over het **bruto** inkomen;
- er een grens is (belastingvrije voet); over het gedeelte van het bruto inkomen tot aan die grens is geen belasting verschuldigd;
- over het gedeelte van het bruto inkomen boven die grens één vast belastingpercentage geldt.

Wanneer er voorstellen worden ontwikkeld om de tariefstructuur te veranderen is het belangrijk om te zien welke gevolgen dit heeft voor de totale belastingopbrengst maar ook voor de individuele belastingbetaler. Daarom is uit de populatie van alle belastingbetalers een representatieve steekproef van 250 personen genomen.

 *Klik op de tab **Vlaktaks**. Je komt nu in het werkblad **Vlaktaks**.*

Je ziet hier een tabel met gegevens van de 250 personen uit de steekproef. In kolom C staat het bruto inkomen, in kolom D het aftrekbare bedrag volgens de huidige tariefstructuur, en in kolom E het belastbaar inkomen. In kolom F staat de inkomstenbelasting volgens het huidige tarief (zie tabel 2). De bedragen zijn afgerond op hele euro's. De 250 personen zijn gerangschikt op **bruto** inkomen.

Een politicus stelt voor de vlaktaks in te voeren met een belastingvrije voet van 7500 euro, en een belastingheffing van 30% over alles daarboven.

Door de invoering van deze vlaktaks zou, in vergelijking met de huidige situatie, bij sommige personen de inkomstenbelasting flink dalen, maar bij andere personen zou deze juist flink stijgen. Neem bijvoorbeeld de laatste persoon in de steekproef (nummer 250). Het bruto inkomen van deze persoon is 123 043 euro, dus volgens het voorstel moet 30% belasting betaald worden van $123\,043 - 7500$ euro. Dat is 34 663 euro belasting, een stuk minder dan de huidige 39 130 euro.

De politicus beweert dat bij de door hem voorgestelde vlaktaks de totale belastingopbrengst vrijwel hetzelfde is als in de huidige situatie. We willen onderzoeken of de politicus gelijk heeft. Dit doen we door te berekenen hoeveel procent de totale belastingopbrengst in de steekproef zou veranderen na invoering van de vlaktaks. Hiervoor moet je eerst zorgen dat bij iedereen in kolom G de vlaktaks komt te staan. Voor personen met een bruto inkomen van minder dan 7500 euro kun je in kolom G een 0 invullen. Voor de overige personen moet je in kolom G een geschikte formule invullen. Tenslotte moet je de totale belastingopbrengst volgens het huidige systeem en volgens de vlaktaks berekenen. Hiermee kan de procentuele verandering worden berekend.

- 7p **13** Bereken met hoeveel procent de totale belastingopbrengst bij deze steekproef verandert wanneer het huidige stelsel wordt vervangen door een stelsel met de voorgestelde vlaktaks. Licht je werkwijze toe.

Overlevingstafels

Verzekeringsmaatschappijen en pensioenfondsen gebruiken zogenoemde overlevingstafels. Aan de hand van overlevingstafels kan onder andere worden bepaald hoe lang verzekerden en pensioengerechtigden naar verwachting in leven zullen blijven. Een overlevingstafel is een tabel waarin van een groep van 100 000 pasgeborenen staat welk aantal er x jaar na de geboorte naar verwachting nog in leven is. Dit aantal heet $L(x)$.

 *Klik op de tab **Overlevingstafel vrouwen**. Je komt nu in het werkblad **Overlevingstafel vrouwen**.*

Hier zie je een overlevingstafel. In kolom A zie je de leeftijd x en in kolom B het bijbehorende aantal overlevenden $L(x)$ voor vrouwen. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat volgens de overlevingstafel 99 381 van de 100 000 pasgeboren meisjes de leeftijd van 10 jaar bereiken.

Op basis van de gegevens in de kolommen A en B kun je de kans berekenen dat een vrouw van een bepaalde leeftijd al dan niet een hogere leeftijd bereikt.

- 4p **14** Bereken de kans dat een vrouw die zojuist 30 jaar is geworden, voor haar 60e verjaardag komt te overlijden.

In kolom B kun je zien dat slechts 99 610 van de 100 000 pasgeboren meisjes de leeftijd van 1 jaar bereiken. Er zijn dus 390 meisjes die in hun eerste levensjaar overlijden. Je kunt in kolom B ook zien dat 99 530 meisjes de leeftijd van 2 jaar bereiken. Er zijn dus 80 meisjes die in hun tweede levensjaar overlijden. Je kunt nu een kolom maken met daarin de aantallen vrouwen die in een bepaald levensjaar overlijden. Op basis van die aantallen kun je berekenen hoe oud vrouwen gemiddeld worden. Je mag er daarbij van uit gaan dat de 390 meisjes die in hun eerste levensjaar overlijden gemiddeld 0,5 jaar oud zijn geworden, dat de 80 meisjes die in hun tweede levensjaar komen te overlijden gemiddeld 1,5 jaar oud zijn geworden, enzovoorts.

- 5p **15** Bereken met behulp van Excel hoe oud vrouwen gemiddeld worden volgens de overlevingstafel. Licht je werkwijze toe.

Omdat van de 100 000 pasgeboren meisjes er volgens de overlevingstafel 390 niet de leeftijd van 1 jaar bereiken, zegt men dat de sterftkans $P(0)$ van 0-jarige meisjes gelijk is aan $\frac{390}{100000}$. Dus $P(0) = \frac{390}{100000} = 0,0039$. Van de

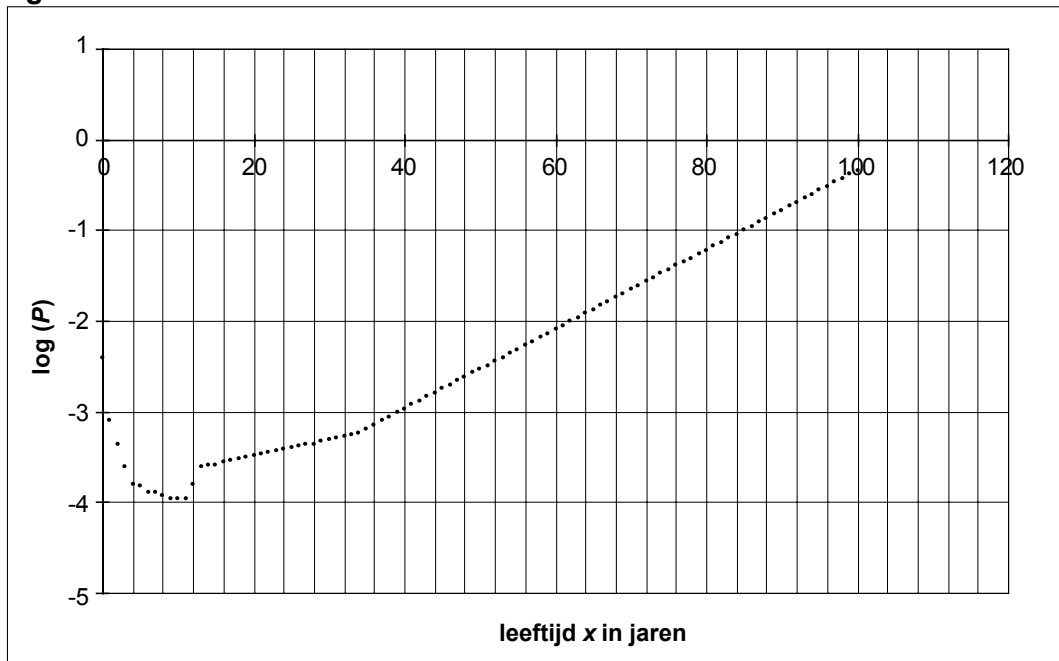
99 610 meisjes die hun 1e verjaardag halen, zullen er volgens de overlevingstafel 80 niet de leeftijd van 2 jaar bereiken. De sterftkans van 1-jarige meisjes is daarom gelijk aan $\frac{80}{99610} \approx 0,000803132$. Dus


$P(1) = \frac{80}{99610} \approx 0,000803132$. Met behulp van de gegevens in de

overlevingstafel kun je bij elke leeftijd de sterftkans berekenen.

Omdat de grootste sterftkans duizenden keren groter is dan de kleinste sterftkans is het niet handig om de sterftkans $P(x)$ van x -jarigen uit te zetten in een grafiek. In plaats daarvan zet men $\log(P(x))$ uit in een grafiek. In figuur 2 is de grafiek van $\log(P(x))$ getekend voor leeftijden tot en met 100 jaar. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage. Je ziet dat er een duidelijk verband bestaat tussen de sterftkans en de leeftijd voor vrouwen tussen de 20 en 100 jaar.

figuur 2



 *Klik op de tab **Overlevingstafel mannen**. Je komt nu in het werkblad **Overlevingstafel mannen**.*

Je ziet nu een overlevingstafel voor mannen. In kolom A zie je weer de leeftijd x en in kolom B het bijbehorende aantal overlevenden. Op basis van deze gegevens kun je een grafiek maken zoals die in figuur 2, maar dan voor mannen. In Excel kun je de logaritme uitrekenen met de functie $\text{LOG}(\text{getal})$. Bijvoorbeeld, met de formule $=\text{LOG}(D43)$ wordt de logaritme van het getal in cel D43 uitgerekend.

- 5p **16** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van mannen voor leeftijden tussen de 20 en 100 jaar.


Voor vraag 17 heb je de computer niet nodig.

Met behulp van de gegevens in de overlevingstafel voor vrouwen kun je de sterftetekans berekenen voor verschillende leeftijden. Een formule die deze sterftetekans goed benadert voor leeftijden tussen 35 en 100 jaar is:

$$P(x) = 0,0000192 \cdot 1,106^x$$

De afgeleide van deze formule, $\frac{dP}{dx}$, heeft voor elke leeftijd een andere waarde.

- 4p 17 Bepaal de afgeleide van $P(x)$ en beschrijf wat de waarde van $\frac{dP}{dx}$ voorstelt in deze context.

 *Als je helemaal klaar bent en je wilt je werk inleveren dan kun je Excel afsluiten. Je komt dan weer terug in het openingsscherm.*

Dit was de laatste vraag van het deel waarbij de computer wordt gebruikt.