

Examen VWO

2008

tijdvak 1
maandag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A1

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Tennisballen

Een tennisballenfabrikant produceert drie types tennisballen: Yellow, Silver en Gold. Van elk type is de diameter (bij benadering) normaal verdeeld. De fabrikant geeft de diameter van een tennisbal altijd op in inches.

De fabrikant heeft bij 400 tennisballen van het type Yellow de diameters laten opmeten. Het resultaat daarvan zie je in tabel 1.

tabel 1

400 waarnemingen bij tennisballen van het type Yellow

| diameter in inches | < 2,4 | 2,4 – <2,5 | 2,5 – <2,6 | 2,6 – <2,7 | 2,7 – <2,8 | ≥ 2,8 |
|---------------------|-------|------------|------------|------------|------------|-------|
| aantal waarnemingen | 1 | 4 | 98 | 232 | 63 | 2 |

- 5p **1** Zet de gegevens uit op het normaal waarschijnlijkheidspapier op je uitwerkbijlage en toon daarmee aan dat de waargenomen diameters van Yellow inderdaad bij benadering normaal verdeeld zijn.

Uit de tekening die je bij de vorige vraag hebt gemaakt kun je aflezen hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van de diameter van een bal van het type Yellow is.

- 3p **2** Bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking van de diameter van een bal van het type Yellow. Licht je werkwijze toe.

Bij officiële wedstrijden mag een tennisbal niet te groot en ook niet te klein zijn. In de spelregels staat daarover het volgende:

Bij alle proeven ter bepaling van de omvang moet een omvangmeter gebruikt worden. De omvangmeter bestaat uit een metalen plaat. In de plaat zitten twee cirkelvormige openingen met een diameter van respectievelijk 2,575 inch en 2,700 inch. De bal mag niet door zijn eigen gewicht door de kleine opening vallen, maar moet wel door zijn eigen gewicht door de grootste opening vallen.

Van het type Gold is de diameter (bij benadering) normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,620 inch en een standaardafwijking van 0,048 inch.

De tennisballenfabrikant krijgt de opdracht 1200 tennisballen van het type Gold te leveren die gebruikt kunnen worden bij officiële wedstrijden.

- 4p **3** Bereken hoeveel tennisballen de fabrikant naar verwachting moet produceren om aan deze opdracht te voldoen.

Bij trainingen is men vaak veel soepeler met het accepteren van tennisballen. Tennisclub Game4u vindt het niet zo erg als trainingsballen niet allemaal voldoen aan de officiële wedstrijdregels. Een partij van dergelijke ballen is vaak goedkoper.

Van het type Silver is de diameter (bij benadering) normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,630 inch en een standaardafwijking van 0,057 inch. Tennisclub Game4u heeft bij de tennisballenfabrikant een groot aantal trainingsballen van het type Silver besteld. Alleen wanneer veel ballen een erg kleine diameter hebben, wordt deze bestelling niet geaccepteerd. Bij Game4u is dat het geval wanneer in een steekproef van 20 tennisballen er meer dan 5 te vinden zijn met een diameter die kleiner is dan 2,55 inch.

5p 4 Bereken de kans dat Game4u deze bestelling niet accepteert.

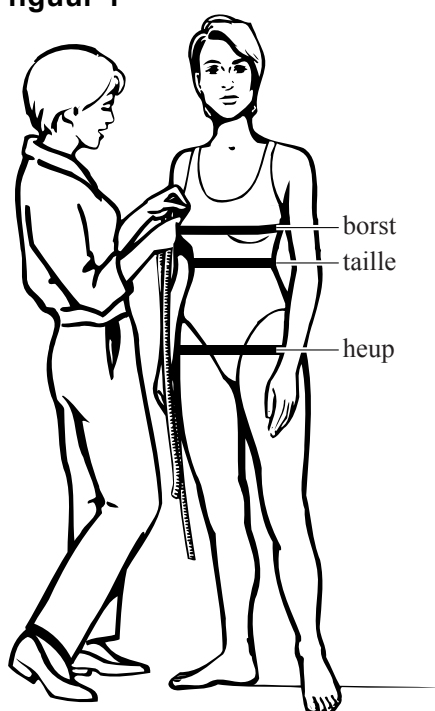
Androgynie-index

Van veel mensen zoals fotomodellen, kledingmodellen, acteurs, actrices en atleten wordt beweerd dat ze een 'goed figuur' hebben. Maar wanneer kun je spreken van een 'goed figuur'? Om een 'goed figuur' van mannen en vrouwen in een getal uit te kunnen drukken, hanteert men de zogenoemde *androgynie-index*. De *androgynie-index* wordt als volgt berekend:

$$\text{androgynie-index} = \frac{t}{\sqrt{h \times b}}$$

Hierin is b de borstmaat in cm, t de taillemaat in cm en h de heupmaat in cm. Deze maten worden gemeten door een meetlint rond het lichaam te passen op de hoogte van de borst, taille respectievelijk heup. Zie figuur 1.

figuur 1

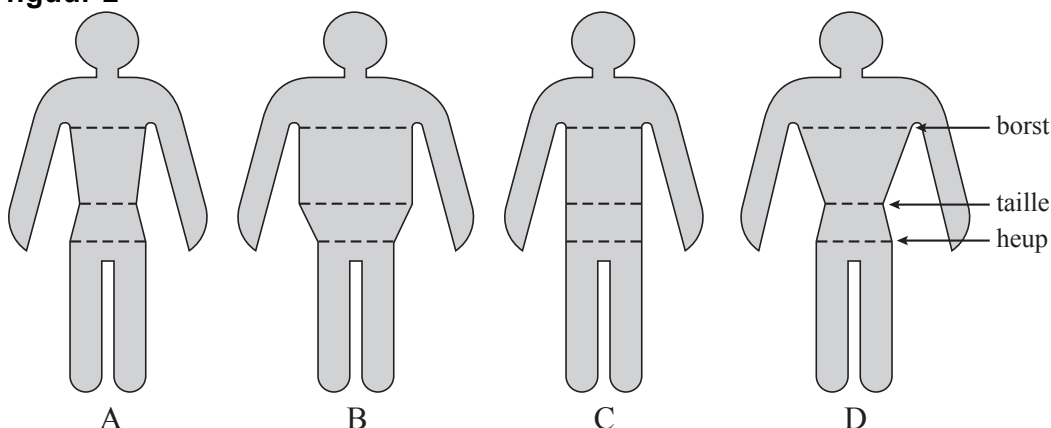


Arnold Schwarzenegger (acteur/politicus) heeft een *androgynie-index* van 0,83. De borst- en taillemaat van de gespierde Schwarzenegger zijn 111 cm respectievelijk 91 cm.

3p 5 Bereken de heupmaat van Schwarzenegger.

In figuur 2 zijn vier figuren afgebeeld: A, B, C en D. De *androgynie-index* is van alle vier figuren verschillend.

figuur 2



- 4p **6** Sorteert de figuren naar de grootte van hun *androgynie-index* van klein naar groot. Geef je antwoord door de 4 letters in de juiste volgorde achter elkaar te schrijven.

Mensen die het leuk vinden om modellenwerk te doen, schrijven zich vaak in bij modellenbureaus. Sommige bureaus schrijven alleen mensen in als die aan bepaalde voorwaarden voldoen. Modellenbureau FOBEL schrijft modellen alleen in als de maten van borst-taille-heup (in cm) liggen tussen de 81-56-86 en 91-64-91 voor vrouwen en tussen de 96-76-85 en 107-84-102 voor mannen. Voor de volgende vraag nemen we aan dat de tussenliggende maten van borst-taille-heup in alle mogelijke verhoudingen kunnen voorkomen. Er zit een maximum aan de *androgynie-index* van de vrouwen en van de mannen die bij FOBEL kunnen worden ingeschreven. Het maximum voor de mannen verschilt van het maximum voor de vrouwen.

- 3p **7** Bereken dit verschil. Geef je antwoord in 3 decimalen.

Naast de *androgynie-index* maakt men ook vaak gebruik van de *taille-heup-verhouding*. Dat is de verhouding van de taillemaat en de heupmaat. In formulevorm:

$$\text{taille-heup-verhouding} = \frac{t}{h}$$

In een praktische opdracht voor wiskunde A1 maken Fatima en Hilde gebruik van zowel de *androgynie-index* als de *taille-heup-verhouding*. Volgens Fatima is de *taille-heup-verhouding* een bijzonder geval van de *androgynie-index*. Hilde begrijpt niet wat Fatima bedoelt met 'een bijzonder geval'. Fatima legt uit: "Je kunt laten zien dat onder een bepaalde voorwaarde de *androgynie-index* gelijk is aan de *taille-heup-verhouding*."

- 3p **8** Leg uit dat de *taille-heup-verhouding* inderdaad een bijzonder geval is van de *androgynie-index*.

De psychologen Voracek en Fischer hebben de *androgynie-index* uitgerekend van 577 vrouwelijke topmodellen van de afgelopen 50 jaar. Uit hun onderzoek bleek dat de *androgynie-index* van deze modellen gemiddeld 0,66 bedraagt. De onderlinge verschillen waren klein: 80% van alle modellen had een *androgynie-index* tussen 0,62 en 0,70.

Op basis van deze gegevens kan de standaardafwijking worden berekend. Je mag er daarbij van uit gaan dat de *androgynie-index* van de modellen bij benadering normaal verdeeld is.

4p 9 Bereken de standaardafwijking. Geef je antwoord in 2 decimalen.

Waterschappen

Nederland is verdeeld in een aantal waterschappen. Deze waterschappen zorgen onder andere voor een goede afvoer van het oppervlaktewater om wateroverlast tegen te gaan.

De kosten daarvan worden voor een deel opgebracht door de eigenaren van de woningen in het waterschap. Deze eigenaren betalen jaarlijks belasting aan het waterschap.

Voor de berekening van deze belasting maken de waterschappen onderscheid tussen de zogenoemde **ingezetenenomslag** en de **omslag-gebouwd**.

De ingezetenenomslag is een vast tarief per woning.

De omslag-gebouwd hangt af van de WOZ-waarde van de woning. De WOZ-waarde is de waarde van een woning die door de gemeente wordt vastgesteld op grond van de wet Waardering Onroerende Zaken.

De berekening van de omslag-gebouwd gaat als volgt:

- de WOZ-waarde van de woning wordt door 2268 gedeeld;
- de uitkomst van de deling wordt **naar beneden** afgerond op een geheel getal;
- dit gehele getal is het aantal eenheden van de woning;
- het aantal eenheden wordt vermenigvuldigd met het zogeheten tarief-gebouwd-per-eenheid.

Elk waterschap stelt jaarlijks de beide tarieven (dus zowel de ingezetenenomslag als het tarief-gebouwd-per-eenheid) vast.

De totale waterschapsbelasting is de som van ingezetenenomslag en omslag-gebouwd.

In tabel 2 zie je de tarieven die waterschap Rivierenland hanteerde in het jaar 2004.

tabel 2

| waterschap | ingezetenenomslag | tarief-gebouwd-per-eenheid |
|--------------|-------------------|----------------------------|
| Rivierenland | 32,89 euro | 1,02 euro |

De heer Eerkens is eigenaar van een woning met een WOZ-waarde van 162 000 euro. De heer Abbel is eigenaar van een woning met een WOZ-waarde van 219 600 euro.

De heer Eerkens betaalde in 2004 minder belasting aan waterschap Rivierenland dan de heer Abbel.

4p 10 Bereken dit verschil in waterschapsbelasting.

In 2003 hanteerde waterschap Rivierenland andere bedragen voor de tarieven van de ingezetenenomslag en de omslag-gebouwd dan in 2004.

In 2003 betaalde Eerkens in totaal 106,36 euro; Abbel betaalde in dat jaar 132,36 euro. De WOZ-waarden van de woningen waren in 2003 hetzelfde als in 2004.

Met deze gegevens kunnen we narekenen dat in 2003 het tarief-gebouwd-per-eenheid gelijk was aan 1,04 euro.

4p 11 Laat met een berekening zien dat het bedrag van 1,04 euro juist is en bereken het tarief ingezetenenomslag dat door waterschap Rivierenland in 2003 werd gehanteerd.

In tabel 3 zie je, naast de tarieven van Rivierenland, ook de tarieven van waterschap Reest-Wieden van het jaar 2004.

tabel 3

| waterschap | ingezetenenomslag | tarief-gebouwd-per-eenheid |
|-------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| Rivierenland | 32,89 euro | 1,02 euro |
| Reest-Wieden | 53,52 euro | 0,65 euro |

Wanneer we de tarieven van beide waterschappen met elkaar vergelijken, dan blijkt dat waterschap Rivierenland in 2004 bij hoge WOZ-waarden duurder is dan waterschap Reest-Wieden. Bij lage WOZ-waarden is Rivierenland juist goedkoper.

5p 12 Onderzoek bij welke WOZ-waarden waterschap Rivierenland goedkoper is dan Reest-Wieden.

In de zomer van 2004 werd in Portugal het Europese kampioenschap voetballen gehouden, waarbij Griekenland uiteindelijk kampioen werd. Daaraan deden 16 landen mee. Zij waren verdeeld in 4 poules van 4 landen. In elke poule speelde elk land een keer tegen elk ander land van die poule. Na afloop van de poulewedstrijden gingen de beste 2 landen van elke poule door naar de kwartfinale.

In de kwartfinale speelde elk land slechts één wedstrijd tegen een ander land. De landen die wonnen, gingen door naar de halve finale. In de halve finale speelde weer elk land één wedstrijd. De winnaars gingen naar de finale. In de finale werd in één wedstrijd beslist welk land zich kampioen mocht noemen.

- 4p 13 Bereken hoeveel wedstrijden in totaal tijdens het toernooi in Portugal werden gespeeld.

Wat eraan vooraf ging

Om te bepalen welke landen mee mochten doen aan dit toernooi, werden in Europa voorronden gespeeld. De tien winnende landen van deze voorronden plaatsten zich, samen met het gastland Portugal, rechtstreeks voor het toernooi in Portugal.

Van de landen die zich niet rechtstreeks wisten te plaatsen, kregen de volgende landen alsnog de gelegenheid zich te plaatsen voor het toernooi: Kroatië, Letland, Nederland, Noorwegen, Rusland, Schotland, Slovenië, Spanje, Turkije en Wales. Deze tien landen speelden in de zogenoemde '**play-offs**'. Op 14 oktober 2003 was de loting hiervoor: de 'UEFA Euro 2004 play-offs draw'. Het resultaat van deze loting zie je in tabel 4.

tabel 4

| |
|-----------------------|
| Letland – Turkije |
| Schotland – Nederland |
| Kroatië – Slovenië |
| Rusland – Wales |
| Spanje – Noorwegen |

In tabel 4 zie je bijvoorbeeld dat Schotland moest duelleren tegen Nederland. Het duel bestond uit twee wedstrijden: een uitwedstrijd en een thuiswedstrijd. De volgorde was van belang want de loting Schotland – Nederland betekende dat Schotland de eerste wedstrijd thuis, dat wil zeggen: in eigen land, speelde en dat Nederland de tweede wedstrijd thuis speelde.

De loting van deze play-offs had voor Nederland ook een ander resultaat kunnen hebben.

- 3p 14 Bereken hoeveel verschillende lotingen er voor Nederland mogelijk waren.

Voor de play-offs werd een speciale loterij georganiseerd. Deelnemers aan deze loterij kochten voor 1 euro een formulier. Op het formulier kon de deelnemer van alle 5 paren duellerende landen aankruisen welk land volgens hem door zou gaan naar het toernooi in Portugal. Van elk paar kon dus maar één land worden aangekruist. Dit was er te winnen:

- een deelnemer die alle 5 landen goed had geraden, kreeg 10 euro uitbetaald;
- een deelnemer die 4 landen goed had geraden, kreeg 3 euro uitbetaald;
- een deelnemer die 3 of minder landen goed raadde, kreeg niets uitbetaald.

Een deelnemer die het formulier blindelings invult, heeft 50% kans om van een paar duellerende landen te raden welk land doorgaat naar het toernooi in Portugal. Wanneer we ervan uit gaan dat elke deelnemer het formulier blindelings invult, kunnen we berekenen hoeveel winst de organisator van deze loterij naar verwachting per formulier maakt.

4p **15** Bereken deze verwachte winst per formulier.

Tijdens de kampioenschappen

Nederland won bij de play-offs van Schotland en mocht dus meedoen aan het kampioenschap. Daarin haalde het Nederlandse team de kwartfinale. Dat was nogal verrassend want van de 8 teams die de kwartfinale haalden, was Nederland het enige team dat aan de play-offs had meegedaan.

Ferry, die nauwelijks verstand van voetballen heeft, gaat ervan uit dat de 16 teams (10 uit de voorrondes, 1 gastland en 5 via de play-offs) die aan het kampioenschap begonnen, vrijwel gelijkwaardig zijn. Hij wil uitrekenen hoe groot de kans is dat precies één team uit de play-offs in de kwartfinale komt. Daartoe maakt hij een vaas met 11 blauwe en 5 rode knikkers. Uit die vaas moeten dan 8 knikkers worden getrokken.

4p **16** Bereken de kans dat daar precies één rode knikker bij zit.

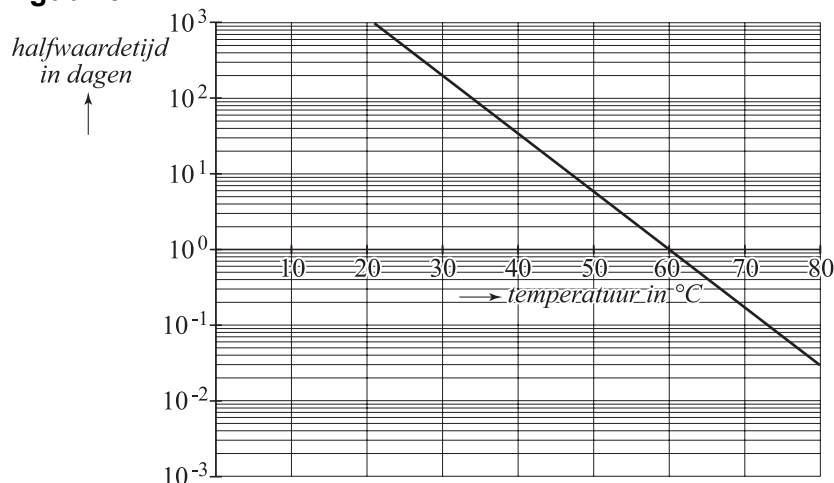
Honing

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym **diastase**: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het **diastase-getal**.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastase-getal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.

Een maat waarmee de afname van het diastase-getal kan worden weergegeven, is de zogeheten **halfwaardetijd**. Dat is de tijd waarin het diastase-getal wordt gehalveerd. In figuur 3 zie je deze halfwaardetijd uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.

figuur 3



- 3p 17 Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van figuur 3.

Soms gaat honing versuikeren. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing. Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten.

In figuur 3 zie je dat het diastase-getal gehalveerd wordt als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden.

Een partij honing met diastase-getal 27 wordt 7 uur lang op een temperatuur van 60 °C gehouden. We gaan ervan uit dat de afname van het diastase-getal exponentieel verloopt.

- 5p 18 Bereken het diastase-getal na deze 7 uur.

Het diastase-getal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30. Als het diastase-getal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als **bakkershoning** verkocht worden.

Een bepaald type honing heeft bij winning diastase-getal 28. Deze honing wordt gedurende 3 jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C. We gaan er nog steeds van uit dat de afname van het diastase-getal exponentieel verloopt.

- 3p **19** Laat met behulp van de grafiek in figuur 3 zien dat deze honing na 3 jaar bakkershoning is geworden.

Een imker verkoopt in glazen potten twee soorten honing: koolzaadhoning en boekweithoning. De imker heeft drie keer zoveel koolzaadhoning als boekweithoning. Daarom wordt 75% van de glazen potten gevuld met koolzaadhoning en 25% met boekweithoning.

foto



De klanten van de imker brengen de glazen potten terug, waarna de imker de potten schoonmaakt. De imker kan de ingeleverde potten daarna opnieuw met honing vullen. Dat gebeurt willekeurig. Het kan dus gebeuren dat een pot de ene keer gevuld is met koolzaadhoning en de andere keer met boekweithoning.

- 4p **20** Bereken de kans dat een pot na 10 keer vullen minstens 5 keer is gevuld met koolzaadhoning.