wiskunde A1,2

Examen VWO - Compex

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **05**

Tijdvak 1
Woensdag 25 mei
totale examentijd 3 uur

Vragen 14 tot en met 23

In dit deel staan de vragen waarbij de computer wordt gebruikt.

Voor dit deel van het examen zijn maximaal 33 punten te behalen; het gehele examen bestaat uit 23 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de beantwoording van vraag 23 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

Je geeft de antwoorden op deze vragen op papier.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Zalm

Wanneer van een vissoort te veel gevangen wordt, kan de populatie zich niet herstellen en valt er op den duur niets meer te vangen. Visserijbiologen streven dan ook naar een evenwichtssituatie waarbij de jaarlijkse vangst precies gelijk is aan de jaarlijkse groei van de populatie. Om te weten hoeveel er dan jaarlijks gevangen kan worden, moet men dus weten hoe groot de jaarlijkse groei is. Die groei hangt af van de grootte van de populatie. Om hier inzicht in te krijgen is het handig over een geschikt wiskundig model te beschikken. In deze opgave bekijken we enkele mogelijke groeimodellen.

Bij een aantal groeimodellen bekijken we wat er gebeurt wanneer elk jaar een hoeveelheid V gevangen wordt. We gaan er daarbij van uit dat in elk jaar de populatie eerst groeit en dat daarna de vangst plaatsvindt.

Exponentiële groei

Zalmen leggen heel veel eitjes. Ook al brengt maar een klein deel van de eitjes een nieuwe volwassen zalm voort, toch kan onder gunstige omstandigheden een populatie met een factor 5 per jaar groeien. Als we aannemen dat die groeifactor steeds gelijk blijft, kunnen we een model van exponentiële groei gebruiken. Maar zo'n model is slechts beperkt bruikbaar, zoals blijkt uit het volgende:
Alle oceanen samen bevatten ongeveer $1{,}3 \times 10^{18}$ m^3 water. Een gemiddelde Atlantische zalm heeft een volume van $0{,}025$ m^3. Ga uit van een beginpopulatie van 1000 Atlantische zalmen, met een jaarlijkse groeifactor 5.

4p **14** ☐ Bereken na hoeveel jaar het totale volume van de Atlantische zalmen even groot zou zijn als dat van alle oceanen samen.

Vangst bij exponentiële groei

Bij exponentiële groei geldt: hoe groter de populatie, hoe groter de toename, en hoe meer er dus gevangen kan worden. Hierna bezien we wat er gebeurt als men elk jaar evenveel vangt.

Open blad Zalm-1 van het bestand ZALM.XLS.
In blad Zalm-1 van dit bestand kun je met de schuifbalken de beginpopulatie $P(0)$, de jaarlijkse groeifactor g en de jaarlijkse vangst V instellen. Bij het openen van het bestand staat bij $t = 0$ de beginpopulatie $P(0) = 500$ in cel D14. Verder is ingevuld: $g = 2{,}5$ en $V = 400$. Naast $P(0) = 500$ staat de populatieomvang nadat de groei heeft plaatsgevonden. Daar gaat de vangst V van af. Wat dan overblijft wordt de beginpopulatie in het volgende jaar (zie cel G14).

In cel F14 staat de formule "=J9".

3p **15** ☐ Schrijf de Excel-formules op die in de cellen E14 en G14 kunnen staan.

Als je $P(0) = 500$, $g = 4$ en $V = 1500$ instelt, dan is er evenwicht: elk jaar is de groei precies even groot als de daaropvolgende vangst. Ook bij elke andere waarde van g en van $P(0)$ hoort een waarde van V waarbij zo'n evenwichtssituatie bestaat. Als je ieder jaar evenveel vangt als de jaarlijkse groei, dan is er een evenwichtssituatie.

3p **16** ☐ Geef een formule waarmee je bij elke $P(0)$ en elke g kunt uitrekenen hoe groot V is om te zorgen voor een evenwichtssituatie.

In de figuur op blad Zalm-1 zie je de grafiek van de getallen in kolom D uitgezet tegen de tijd t. Stel dat de overheid vaststelt hoeveel er jaarlijks gevangen mag worden. Dit hoeft natuurlijk niet precies gelijk te zijn aan de populatiegroei, die in de praktijk immers niet precies bekend is. Hierbij blijken kleine verschillen grote gevolgen te hebben. Dat is duidelijk te zien in de tabel en in de figuur.

4p **17** ☐ Laat met getallenvoorbeelden zien dat als V ook maar iets te klein of iets te groot is, er absoluut geen sprake meer is van evenwicht. Beschrijf wat hierbij in de grafiek te zien is.

Logistische groei
Bij exponentiële groei gingen we uit van een gelijkblijvende groeifactor. Het is realistischer om aan te nemen dat de groeifactor steeds kleiner wordt naarmate de populatie groter wordt. Een bekend model dat hier rekening mee houdt, is het model van logistische groei.

Daarbij hoort een recurrente betrekking van de vorm:
$P(t+1) = P(t) + c \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)$ met $c > 0$ en $M > 0$.

In dit model is $P(t)$ de populatiegrootte op tijdstip t en zijn c en M constante getallen. De tijd t is in jaren. Op tijdstip $t = 0$ is de populatiegrootte $P(0)$.

Voor $c = 0{,}35$ en $M = 1000$ krijgen we het volgende voorbeeld van logistische groei:

$$P(t+1) = P(t) + 0{,}35 \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{1000}\right)$$

Over dit voorbeeld gaat de volgende vraag.

Bewering:

Zolang de populatiegrootte P(t) veel kleiner is dan 1000 (dat is M), groeit de populatie bij benadering met groeifactor 1,35.

3p **18** ☐ Leg aan de hand van de formule uit dat deze bewering klopt.

De bewering bij vraag 18 over logistische groei kun je illustreren met behulp van het bestand ZALM.XLS blad Zalm-2.

Open blad Zalm-2 van het bestand ZALM.XLS.

In blad Zalm-2 van bestand ZALM.XLS kun je c, M en $P(0)$ instellen. Je ziet dan de bijbehorende tabel en grafiek. Bij bovenstaand voorbeeld hoort $c = 0{,}35$ en $M = 1000$. Bij het openen van blad Zalm-2 is $P(0) = 10$.

Bij een dergelijke kleine waarde van $P(0)$ kun je in het bestand zichtbaar maken dat de bewering bij vraag 18 de eerste vier jaren heel goed klopt. Dit kan op veel verschillende manieren. Hier geven we er twee in hoofdlijnen aan.
- Een eerste manier is in cel E12 de formule "=J9"of "=D12" in te vullen, vervolgens in cel E13 een geschikte formule in te vullen en deze naar beneden te kopiëren in kolom E.
- Een andere manier is in cel E12 niets in te vullen, in cel E13 een formule en deze naar beneden te kopiëren in kolom E.

4p **19** ☐ Gebruik een manier om de bewering bij vraag 18 met het bestand aan te tonen. Schrijf op of je in E12 niets hebt ingevuld of schrijf de waarde of formule op die je in E12 hebt ingevuld. Schrijf ook de formules op die je in E13, E14, enzovoorts hebt ingevuld (en/of naar beneden hebt gekopieerd) om te laten zien dat de populatie aanvankelijk groeit met groeifactor 1,35. Licht je antwoord toe.

Bij $c = 0{,}35$ groeit $P(t)$ in dit voorbeeld geleidelijk naar de grenswaarde 1000, maar bij grotere waarden van c treden er complicaties op. Bij zulke waarden van c kan volgens het model $P(t)$ soms negatief worden.
Voor zalm zou c echter tamelijk groot moeten zijn. In dat geval is ook het model van logistische groei blijkbaar niet erg realistisch. Daarom gaan we op zoek naar een beter model.

Het groeimodel van Ricker
De bioloog W. Ricker deed zo'n 50 jaar geleden onderzoek naar zalm. Hij ontdekte dat een model van de volgende vorm goed bruikbaar was:

$$P(t+1) = P(t) \cdot r^{1-\frac{P(t)}{M}} \quad \text{met } r > 1 \text{ en } M > 0.$$

In dit model is $P(t)$ de populatiegrootte op tijdstip t en zijn r en M constante getallen.
Hierin is de tijd t in jaren en is op $t = 0$ de populatiegrootte $P(0)$.

Bij dit model is M een evenwichtswaarde.

3p **20** ☐ Toon dat aan met behulp van de formule. Licht je antwoord toe.

Open blad Zalm-3 van het bestand ZALM.XLS.

In dit blad kun je r, M en $P(0)$ instellen. Je ziet dan de bijbehorende grafiek.
Bij het openen van het blad Zalm-3 is $r = 4{,}5$, $M = 150$ en $P(0) = 100$.

In de praktijk kan r wel groter dan 5 zijn. Vanaf een bepaalde waarde van r nadert $P(t)$ niet meer naar een evenwichtswaarde. Ook dit wordt in de werkelijkheid waargenomen.
3p **21** ☐ Geef een waarde van r waarbij $P(t)$ niet convergeert en beschrijf wat er dan met de waarden van $P(t)$ gebeurt.

Vangst bij het groeimodel van Ricker
Voor het vervolg van deze opgave kijken we naar het model van Ricker met $r = 9$ en $M = 200$. De recursievergelijking is dan $P(t+1) = P(t) \cdot 9^{1-\frac{P(t)}{200}}$.

Om overzichtelijke getallen te houden, spreken we af dat $P(t)$ het aantal zalmen in duizendtallen voorstelt.

Stel in blad Zalm-3 van bestand ZALM.XLS in: $r = 9$, $M = 200$ en beginpopulatie $P(0) = 130$. Bij deze waarden gaan we kijken hoeveel zalmen er jaarlijks gevangen kunnen worden.
Uitgaande van deze beginpopulatie van 130 duizend zalmen staat in E13 het verschil tussen $P(1)$ en $P(0)$, namelijk ongeveer 150,5.
Door dit verschil van 150,5 duizend steeds weg te vangen, blijft het aantal zalmen constant (op 130 duizend).

Het aantal vissen dat men elk jaar kan vangen, kan echter nog groter zijn dan 150,5 duizend. Daarvoor moet je niet uitgaan van 130 duizend zalmen, maar van een andere $P(0)$.

3p **22** ☐ Bepaal met behulp van ZALM.XLS blad Zalm-3 het maximale aantal jaarlijks te vangen zalmen. Licht je antwoord toe.

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van

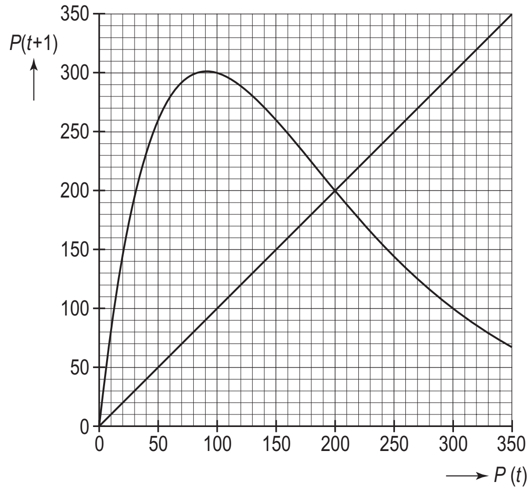
$P(t+1) = P(t) \cdot 9^{1-\frac{P(t)}{200}}$ en van $P(t+1) = P(t)$

getekend. Deze grafieken staan vergroot op de uitwerkbijlage.

Je kunt het maximale aantal jaarlijks te vangen zalmen bij benadering ook vinden door deze grafieken op de uitwerkbijlage te gebruiken.

3p **23** ☐ Lees dit maximale aantal jaarlijks te vangen zalmen in de figuur af.
Schrijf dit aantal op en licht je antwoord met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage toe.

figuur



Sluit het Excelbestand ZALM.XLS af. Het bestand niet opslaan.

Dit was de laatste vraag van het deel waarbij de computer wordt gebruikt.

Einde