wiskunde A1,2

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **05**

Tijdvak 2
Woensdag 22 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 5 is een uitwerkbijlage bijgevoegd.

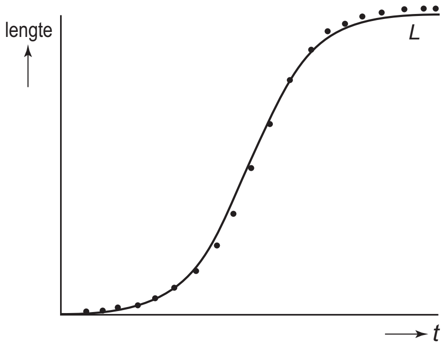
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Zonnebloemen

Zonnebloemen zijn snelgroeiende planten die vaak worden gebruikt voor de productie van olie. Om zicht te krijgen op het groeiproces van zonnebloemen, worden regelmatig metingen gedaan. Bij een experiment is van een zonnebloem gedurende twintig weken elke week de lengte gemeten. Het resultaat van deze metingen is hieronder in figuur 1 met stippen weergegeven.

figuur 1



In figuur 1 zie je ook een globale grafiek, die de groei van de zonnebloem goed benadert. Bij die grafiek hoort de volgende formule:

$$L(t) = \frac{400}{1 + 399 \cdot (0,55)^t}$$

In deze formule is $L(t)$ de lengte van de zonnebloem in centimeters en t de tijd in weken vanaf het begin van de metingen.

In figuur 1 kun je zien dat de grafiek van L nadert naar een grenswaarde. Verder verloopt de groei volgens de formule van L in het begin bij benadering exponentieel. Dit noemen we de exponentiële fase. Deze exponentiële fase duurt tot L de helft van zijn grenswaarde bereikt heeft.

3p **1** ☐ Bereken de groeifactor per week voor de eerste week.

5p **2** ☐ Bereken tot welke waarde van t de exponentiële fase duurt.

De lengte van een zonnebloem kan ook goed beschreven worden met een recurrente betrekking. Deze recurrente betrekking voor de lengte H_t van de zonnebloem ziet er als volgt uit:

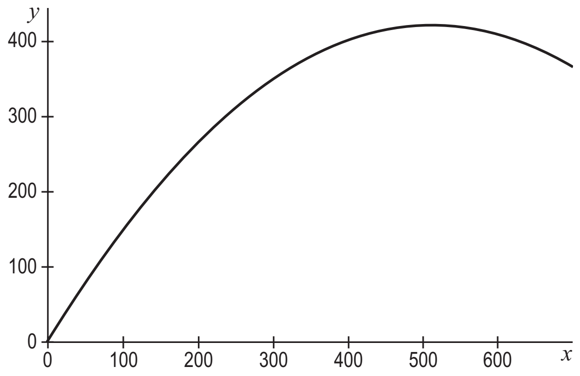
$$H_t = H_{t-1} + 0,64 \cdot H_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{H_{t-1}}{400}\right), \text{ met } H_0 = 2 \text{ en } t \text{ de tijd in weken.}$$

De formule van $L(t)$ en de betrekking voor H_t zullen niet precies dezelfde uitkomsten geven.

4p **3** ☐ Bereken hoe groot het verschil is tussen beide uitkomsten voor $t = 9$.

Bij de recurrente betrekking kunnen we een webgrafiek tekenen. De grafiek die je daarvoor nodig hebt, staat in figuur 2. Deze figuur is ook vergroot afgedrukt op de uitwerkbijlage.

figuur 2



De formule die bij deze grafiek hoort, is van de vorm $y = ax^2 + bx$. De waarden van a en b kunnen worden berekend met behulp van de recurrente betrekking voor H_t.

3p **4** ☐ Bereken de waarden van a en b.

Na 8 weken is de zonnebloem 90 cm lang.

5p **5** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de webgrafiek vanaf $t = 8$. Gebruik deze webgrafiek om te bepalen hoeveel weken later de lengte van de zonnebloem voor het eerst meer dan 3 meter is.

Macht

Sinds 1 mei 2004 bestaat de Europese Unie uit 25 landen. In de Raad van Ministers heeft elk land één zetel. In deze raad worden veel beslissingen genomen. Daarbij heeft niet elk land evenveel stemmen. Zo heeft Frankrijk 29 stemmen, Nederland 13 stemmen en Denemarken 7 stemmen. Op deze wijze beschikken de 25 landen samen over 321 stemmen. Een land stemt óf voor óf tegen en kan zich dus niet van stemming onthouden of met een deel van zijn stemmen vóór en een ander deel tegen stemmen.
Vaak worden beslissingen genomen bij meerderheid van stemmen. Dat betekent dat een voorstel alleen wordt aangenomen als meer dan de helft van de stemmen voor dat voorstel is. Dan kan het gebeuren dat de stemmen van Nederland de doorslag geven bij het wel of niet aannemen van een voorstel. Dat is bijvoorbeeld het geval wanneer van de overige landen 152 stemmen voor zijn en 156 stemmen tegen.

3p **6** ☐ Bereken bij welke aantallen voorstemmen van de overige landen de stemmen van Nederland de doorslag geven om een meerderheid voor een voorstel te krijgen.

Bij een stemming kan dus één van de partijen soms de doorslag geven. Hoeveel invloed een partij bij de stemming heeft, geven we aan met de *machtsindex (mi)*.
Aan de hand van een voorbeeld laten we zien hoe je die kunt uitrekenen.
We gaan uit van drie partijen A, B en C. Partij A heeft 6 stemmen, partij B heeft 4 stemmen en partij C heeft 3 stemmen. Zij beslissen over een voorstel bij meerderheid van stemmen.
Eén van de mogelijkheden is de volgende: A stemt voor, B stemt voor en C stemt tegen.
Deze mogelijkheid noteren we met (V,V,T).
We gaan nu de machtsindex van één van deze partijen, partij B, berekenen. Daarvoor kijken we alleen naar de mogelijkheden waarbij deze partij voor stemt. Dat levert de volgende mogelijkheden op:

tabel 1

mogelijkheid I	(V,V,V)
mogelijkheid II	(V,V,T)
mogelijkheid III	(T,V,V)
mogelijkheid IV	(T,V,T)

Omdat de partijen samen 13 stemmen hebben, zijn er minstens 7 stemmen nodig voor een meerderheid. Bij de mogelijkheden I, II en III is er een meerderheid voor het voorstel.
Bij de mogelijkheden II en III zijn de 4 voorstemmen van B onmisbaar om een meerderheid te realiseren.
Bij mogelijkheid I zou die meerderheid ook behaald zijn als B niet voor zou stemmen.
Bij mogelijkheid IV is er geen meerderheid.
Omdat de stemmen van B bij 2 van de 4 mogelijkheden doorslaggevend zijn, zeggen we:

$$\textit{de machtsindex van } B = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

We gebruiken dus de volgende definitie van de machtsindex *(mi)* van een partij:

$$mi = \frac{\textit{aantal mogelijkheden waarbij de voorstemmen van die partij doorslaggevend zijn voor de meerderheid}}{\textit{totaal aantal mogelijkheden waarbij die partij voorstemt}}$$

Wanneer er sprake is van vier partijen, zijn er meer mogelijkheden. We nemen de volgende situatie: partij A heeft 7 stemmen, partij B heeft 4 stemmen, partij C heeft 4 stemmen en partij D heeft 2 stemmen.
Ook nu beslissen de partijen bij meerderheid van stemmen.

6p **7** ☐ Bereken de machtsindex van A in deze nieuwe situatie.

De verdeling van de stemmen kan tot vreemde situaties leiden wanneer er één partij is met weinig stemmen.
Er zijn 3 partijen. Partij *A* heeft 6 stemmen, partij *B* 4 stemmen en partij *C* slechts 1 stem.
De partijen *B* en *C* stellen nu een nieuwe verdeling voor waarbij *A* en *B* elk 5 stemmen hebben en *C* nog steeds 1 stem. Het aantal stemmen van *C* is dan weliswaar niet groter geworden, maar de machtsverhoudingen zijn wel veranderd.

6p **8** ☐ Toon dit aan door in beide situaties de machtsindex van elk van de drie partijen te berekenen.

We nemen nu een situatie met vijf partijen *A, B*, *C*, *D* en *E.*
Partij *A* heeft 3 stemmen en de overige partijen hebben elk 1 stem.

6p **9** ☐ Onderzoek of de machtsindex van *A* meer dan drie maal zo groot is als de machtsindex van *B*.

De wet van Benford

In 1881 ontdekte Simon Newcomb een bijzondere eigenschap van sommige reeksen getallen. Hij keek steeds naar het *begincijfer* van de getallen in zo'n reeks en constateerde dat daarbij lage begincijfers veel vaker voorkomen dan hoge begincijfers.
Een voorbeeld van zo'n reeks getallen zijn de beurskoersen die elke dag in de krant verschijnen. De lijst met beurskoersen van vrijdag 10 september 2004 begon met de getallen:

17,75	9,15	5,30	28,07	11,02	6,66	39,67	18,73	1,59	1,53	24,29	41,00
20,37	42,31	6,32	5,03	26,08	19,33	10,77	19,39	50,15	1,54	21,86	13,64

Je kunt hier bijvoorbeeld zien dat bij deze reeks getallen het begincijfer 1 veel vaker voorkomt dan het begincijfer 6 (tien keer tegen twee keer).

In 1938 deed Frank Benford uitgebreid onderzoek naar dit verschijnsel. Hij bekeek onder andere de wateroppervlakte van een groot aantal rivieren. Het resultaat van zijn onderzoek vind je in tabel 2.

tabel 2 **wateroppervlakte van rivieren**

begincijfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	104	55	36	38	24	29	18	14	17

Je ziet dat lage begincijfers vaker voorkomen dan hoge.

3p **10** □ Bereken in hoeveel procent van de waarnemingen in tabel 2 het begincijfer 1, 2 of 3 is.

Het blijkt dat dit verschijnsel bij veel reeksen van getallen optreedt, bijvoorbeeld ook bij de lengte van rivieren of bij inwoneraantallen van gemeenten.
Benford heeft een formule opgesteld waarmee je in dergelijke situaties de relatieve frequentie van de verschillende begincijfers kunt benaderen. Deze formule, die bekend staat als *de wet van Benford*, ziet er als volgt uit:

$$F(n) = 100 \cdot \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

In deze formule is $F(n)$ het percentage getallen met het begincijfer n (n = 1, 2, 3, …, 9).
Bij getallenreeksen die voldoen aan de wet van Benford zal bijvoorbeeld ongeveer 17,6% van de getallen met het cijfer 2 beginnen, want $F(2) = 100 \cdot \log\left(\frac{3}{2}\right) \approx 17{,}6$. En in ongeveer 60,2% van de gevallen zal het begincijfer 1, 2 of 3 zijn, want $F(1) + F(2) + F(3) \approx 60{,}2$.

Benford heeft aangetoond dat ook de oneindige rij opeenvolgende machten van het getal 2, de rij 1, 2, 4, 8, 16, … , voldoet aan deze wet.
Maar het is de vraag of de wet van Benford ook geldt wanneer je je beperkt tot een beginstuk van deze rij. Om dat na te gaan, tellen we hoe vaak de cijfers 1, 2 of 3 als begincijfer voorkomen bij de eerste twaalf getallen uit deze rij.

4p **11** □ Onderzoek of het percentage getallen met begincijfer 1, 2 of 3 bij deze twaalf getallen in overeenstemming is met de wet van Benford.

De getallen die voorkomen in een groot financieel overzicht, voldoen meestal bij benadering aan de wet van Benford. Accountants maken daar tegenwoordig vaak gebruik van om mogelijke fraude bij het opstellen van dergelijke overzichten op te sporen. Zij gaan er daarbij van uit dat het bewust manipuleren van getallen door fraudeurs een andere verdeling van begincijfers oplevert dan de wet van Benford voorspelt. Als bijvoorbeeld 7% van de getallen in een financieel overzicht met het cijfer 9 begint, zal men dit overzicht vrijwel zeker nader onderzoeken. Immers: $F(9) \approx 4{,}6$ en het geconstateerde percentage is ongeveer anderhalf keer zo veel.
Bij het accountantskantoor Levrek & Partners hanteert men als vuistregel: er wordt nader onderzoek verricht als het waargenomen aantal getallen met begincijfer 8 meer dan 10% afwijkt van het door de wet van Benford voorspelde aantal.

In een financieel overzicht komen 12 726 getallen voor. Hiervan hebben 712 getallen als begincijfer een 8.

4p **12** ☐ Onderzoek of dit voor Levrek & Partners voldoende aanleiding is voor nader onderzoek.

Bevallen

Uitgerekende datum

In het 'Moeders voor moeders babyboek' staat dat 75% van de zwangere vrouwen bevalt tussen 14 dagen vóór en 14 dagen na de uitgerekende datum. Bij het bepalen van deze uitgerekende datum gaat men uit van een zwangerschap van 40 weken, dus 280 dagen.
De zwangerschapsduur is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 280 dagen.
Met behulp van deze gegevens kun je berekenen dat de bijbehorende standaardafwijking, afgerond op één decimaal, gelijk is aan 12,2 dagen.

In 2002 vonden er in Nederland 199 205 bevallingen plaats. Van een aantal van deze bevallingen duurde de zwangerschap minder dan 36 weken.

4p **13** ☐ Bereken bij hoeveel bevallingen dit het geval was.

De standaardafwijking kan nauwkeuriger bepaald worden.

4p **14** ☐ Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.

Jongen of meisje

Volgens een krantenartikel uit 2000 waarvan hieronder twee fragmenten zijn opgenomen, is hevige zwangerschapsmisselijkheid een voorteken dat er een meisje op komst is. Althans, dat beweren Zweedse epidemiologen.

artikel

Veel braken? Dan is er een meisje op komst!

Hevige misselijkheid en veel braken in de eerste drie maanden van de zwangerschap zijn er voortekenen van dat er een dochter op komst is. Dit melden vijf Zweedse epidemiologen in het internationale medische tijdschrift The Lancet.

...

Onder alle ruim één miljoen kinderen die tussen 1987 en 1995 in Zweden werden geboren, lag de verhouding jongens/meisjes op 51,4/48,6. De onderzoekers ontdekten dat bij de bijna zesduizend moeders die wegens hevige zwangerschapsmisselijkheid werden opgenomen, die verhouding 44,3/55,7 was.

Op grond van dit onderzoek veronderstellen we het volgende: de kans dat een vrouw die wegens zwangerschapsmisselijkheid in het ziekenhuis wordt opgenomen een jongen krijgt, is 0,443.

Drie vrouwen zijn in het ziekenhuis opgenomen wegens zwangerschapsmisselijkheid.

4p **15** ☐ Bereken de kans dat de drie baby's die uit deze zwangerschappen geboren worden van hetzelfde geslacht zijn.

De epidemiologen waren voorzichtiger met hun conclusie dan de schrijvers van het krantenartikel. Zij concludeerden op grond van het onderzoek dat de kans op een jongen bij een zwangerschap met hevige misselijkheid kleiner is dan 0,514. Bij een significantieniveau van 1% is deze conclusie gerechtvaardigd door de geconstateerde verhouding 44,3/55,7 bij een steekproefomvang van ongeveer 6000.
Het is maar de vraag of dezelfde conclusie ook gerechtvaardigd zou zijn als de jongens/meisjes-verhouding 44,3/55,7 bij een steekproefomvang van 600 was opgetreden, dus als men 266 jongens had geteld in een steekproef van 600 kinderen.

5p **16** ☐ Onderzoek of de epidemiologen in dat geval dezelfde conclusie hadden mogen trekken. Gebruik ook hier een significantieniveau van 1%.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Clavarin

Apotheker Veelman verkoopt het medicijn Clavarin. Dit medicijn wordt in strippen van 10 tabletten op de markt gebracht.
Veelman koopt enkele keren per jaar een gelijk aantal strippen bij de fabrikant. De prijs p, die Veelman per strip moet betalen, hangt af van het aantal bestelde strippen. Er geldt de formule:

$$p = 3 - 0{,}0002q$$

In deze formule is p de prijs per strip in euro's en q de bestelgrootte, het aantal strippen dat Veelman elke keer koopt. Een bestelling mag niet groter zijn dan 6000 strippen.
Behalve de prijs voor de strippen heeft Veelman nog andere kosten:

- Voor elke bestelling betaalt Veelman 100 euro aan de fabrikant voor de afhandelingskosten.
- De voorraadkosten voor Veelman zijn 0,20 euro per strip per jaar.

Veelman verkoopt elk jaar 30 000 strippen Clavarin aan zijn klanten. De verkoop ligt het hele jaar door op hetzelfde niveau.

De prijs per strip is zo laag mogelijk bij een bestelgrootte van 6000 strippen. Daarom bestelde Veelman tot nu toe 5 keer per jaar 6000 strippen. Hij vraagt zich nu af of het voordeliger is om 6 maal per jaar een bestelling ter grootte van 5000 strippen te plaatsen.

5p **17** ☐ Onderzoek of het voor Veelman voordeliger is om van een bestelgrootte van 6000 strippen over te gaan op een bestelgrootte van 5000 strippen.

Het *aantal* bestellingen dat Veelman per jaar doet, noemen we n. Omdat Veelman per jaar 30 000 strippen afneemt, geldt voor het aantal strippen q dat hij per keer bestelt:

$$q = \frac{30\,000}{n}$$

We vatten de verschillende kostenposten voor Veelman samen:

- inkoopkosten: per strip $3 - 0{,}0002q$ euro;
- afhandelingskosten: 100 euro per bestelling;
- voorraadkosten: per strip 0,20 euro per jaar.

Veelman verkoopt Clavarin aan zijn klanten voor 4,50 euro per strip. De jaarlijkse opbrengst hiervan is dus $30\,000 \cdot 4{,}50 = 135\,000$ euro.
We kunnen de inkoopkosten voor de strippen uitdrukken in n. Per strip zijn deze inkoopkosten gelijk aan $3 - 0{,}0002 \cdot \frac{30000}{n} = 3 - \frac{6}{n}$.
De inkoopkosten per jaar voor alle 30 000 strippen zijn dan $90000 - \frac{180000}{n}$.
Zo kunnen we ook de andere kostenposten uitdrukken in n. Dat levert de volgende formule op voor de winst W (in euro's), die Veelman jaarlijks heeft op de verkoop van de 30 000 strippen:

$$W = 45000 - 100n + \frac{177000}{n} \qquad (n \geq 5)$$

5p **18** ☐ Toon de juistheid van deze formule aan.

Als je de grafiek van $y = 45000 - 100x + \frac{177\,000}{x}$ tekent, zie je dat deze grafiek dalend is.
Veelman kan dus het beste zo weinig mogelijk bestellingen per jaar doen om een zo groot mogelijke winst te realiseren.
Dat de grafiek van y dalend is, kun je ook nagaan met behulp van de afgeleide van y.

4p **19** ☐ Stel een formule voor de afgeleide van y op en toon met behulp van deze afgeleide aan dat de grafiek van y dalend is.

Einde