

Voor dit examen zijn maximaal 87 punten te behalen; het examen bestaat uit 24 vragen.

Attentie!

Voor de vragen 14 tot en met 24 moet je de computer gebruiken. Schrijf de antwoorden op deze vragen op papier, tenzij anders is aangegeven.

Indien gevraagd wordt resultaten op te slaan, doe je dat in de examenmap.

In het openingsscherm is de naam van deze map gegeven.

Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Voor de uitwerking van de vragen 5, 22 en 23 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

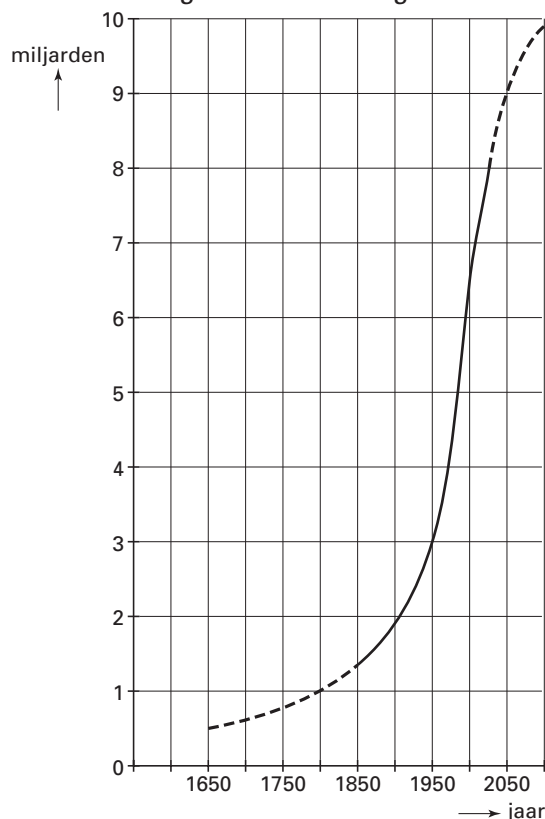
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Bevolkingsgroei

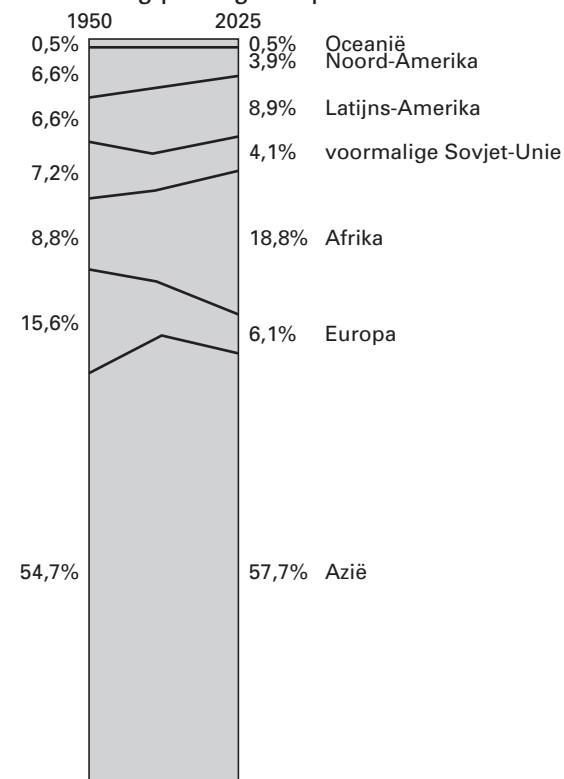
Begin jaren negentig verscheen in NRC Handelsblad een artikel over de bevolkingsgroei en de gevolgen van deze groei. Bij dit artikel werden onder andere de onderstaande figuren 1A, 1B, 1C en 1D afgebeeld.

figuren 1A, 1B, 1C en 1D

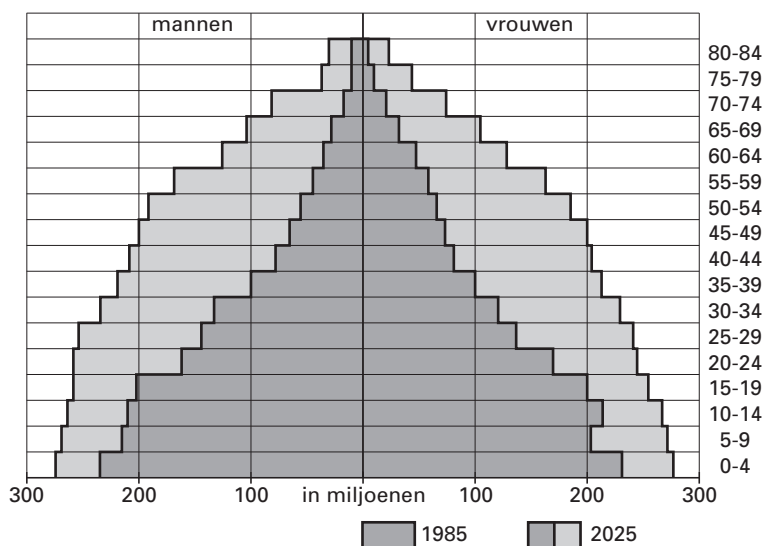
A ontwikkeling wereldbevolking



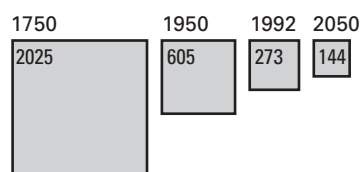
B verdeling per regio in procenten



C verdeling naar leeftijd in ontwikkelingslanden



D bewoonbare aarde in m² per persoon



In figuur 1A zie je de groei van de totale wereldbevolking; in figuur 1B de verdeling van de wereldbevolking over de verschillende regio's in 1950 en de verwachte verdeling in 2025.

In figuur 1B lijkt het erop alsof het aantal mensen in Europa in 2025 naar verwachting kleiner zal zijn dan in 1950. Uit de gegevens in de figuren 1A en 1B samen blijkt echter dat dit niet klopt.

4p **1** Toon dit laatste met een berekening aan.

In het genoemde artikel werd vermeld dat de bevolkingsgroei in Afrika 3% per jaar was.

5p **2** Onderzoek of het volgens de figuren 1A en 1B mogelijk is dat gedurende de gehele periode van 1950 tot 2025 de bevolkingsgroei in Afrika 3% per jaar is.

In figuur 1C zie je de leeftijdsopbouw in de ontwikkelingslanden in 1985 (binnenste deel van de figuur) en de verwachte leeftijdsopbouw in 2025 (gehele figuur).

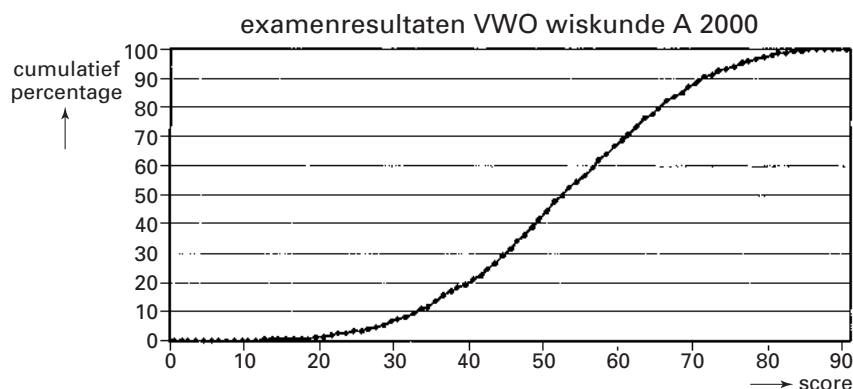
Voor de ontwikkelingslanden geldt dat de verwachte gemiddelde leeftijd in 2025 hoger is dan de gemiddelde leeftijd in 1985.

3p **3** Leg uit hoe dit blijkt uit figuur 1C. Een berekening is hierbij niet vereist.

Examenresultaten

Voor de invoering van de tweede fase bestonden de vakken wiskunde A en wiskunde B. In 2000 werden deze vakken voor het laatst op alle VWO-scholen geëxamineerd. Bij het Centraal Examen wiskunde A was de maximale score 90 punten. Zoals bij elk examen werden de behaalde resultaten onderzocht door middel van een grote landelijke steekproef. Van de 2255 kandidaten in de steekproef was er één met 0 punten en één met 88 punten. Niemand behaalde meer dan 88 punten. De uitkomst van de steekproef is in de vorm van een cumulatieve frequentiepolygoon weergegeven in figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Uit figuur 2 blijkt bijvoorbeeld dat 29% van de kandidaten een score van 45 punten of minder behaalde.

- 3p **4** Bereken met behulp van figuur 2 hoeveel kandidaten een score hadden die hoger was dan 65.

De uitkomst van de steekproef zou ook in de vorm van een boxplot weergegeven kunnen worden.

- 5p **5** Maak zo'n boxplot met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

De gemiddelde score in deze steekproef was 52,5 punten, met een standaardafwijking van 14,7 punten.

Vóór de tweede fase kwam het vrij vaak voor dat iemand zowel in wiskunde A als in wiskunde B examen deed. In deze steekproef gold dat voor 546 kandidaten. We noemen deze groep voor het gemak de A&B-groep. De scores voor wiskunde A van deze A&B-groep waren bij benadering normaal verdeeld, met een gemiddelde van 63,8 punten.

De leerlingen in de A&B-groep verschillen in aanleg voor wiskunde minder van elkaar dan de leerlingen in de hele steekproef. Daarom is het waarschijnlijk dat hun scores een kleinere spreiding vertonen.

Van de 546 kandidaten uit de A&B-groep haalde 6% een score van 44 punten of minder voor wiskunde A, zodat voor de score X geldt: $P(X \leq 44,5) = 0,06$.

- 5p **6** Onderzoek of hieruit volgt dat de standaardafwijking van de scores van de A&B-groep kleiner is dan die van de hele steekproef.

In 2000 was er een apart examen wiskunde A voor 125 kandidaten die waren opgeleid volgens een experimenteel programma ter voorbereiding op de tweede fase. Zo mochten ze, anders dan de overige kandidaten, een grafische rekenmachine gebruiken. De examenopgaven waren grotendeels hetzelfde.

Ter vergelijking kijken we naar het aantal onvoldoendes. Bij het gewone examen had 29% van de kandidaten een onvoldoende. Bij het experimentele examen waren er 30 kandidaten met een onvoldoende.

- 3p **7** Bereken de kans dat van 125 aselekt gekozen deelnemers aan het gewone examen ten hoogste 30 deelnemers een onvoldoende behaalden.

De 125 deelnemers van het experimentele examen scoorden gemiddeld 54,92 punten. We willen dit vergelijken met de resultaten van het gewone examen. Hierbij nemen we aan dat de scores van het gewone examen normaal verdeeld zijn met gemiddelde 52,5 punten en standaardafwijking 14,7 punten.

- 5p **8** Bereken de kans dat 125 aselekt gekozen deelnemers aan het gewone examen gemiddeld ten minste 54,92 punten behaalden.

Vierkeuzevragen

Bij vierkeuzevragen staan bij elke vraag vier mogelijke antwoorden: A , B , C en D . Slechts één daarvan is juist. Een kandidaat kan één van de vier antwoorden kiezen of de vraag onbeantwoord laten. Bij keuze van het juiste antwoord wordt 1 punt toegekend, in alle andere gevallen 0 punten. Als een kandidaat absoluut niet weet welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn, doet hij er daarom verstandig aan om toch een antwoord te kiezen. Dit leidt tot gokgedrag.

Een voorbeeld kan dit verduidelijken. Neem aan dat Tim en Tom, een tweeling, allebei niets snappen van scheikunde. Ze hebben voor een proefwerk dan ook allebei niets geleerd, omdat dat in hun ogen toch geen zin heeft. Bij het proefwerk, dat uit 20 vierkeuzevragen bestaat, vult Tim niets in. Hij heeft dan ook 0 punten. Tom heeft elke vraag gekocht.

- 3p **9** Bereken het aantal punten dat Tom kan verwachten.

Er is ook wel eens geopperd om bij een onjuist antwoord strafpunten te geven. Een kandidaat heeft dan twee keuzes: niets invullen levert 0 punten op; wel iets invullen levert 1 punt op bij een juist antwoord en $-0,5$ punt ($0,5$ strafpunt) bij een onjuist antwoord.

- 3p **10** Bereken de verwachtingswaarde van de score *per vraag* bij dit strafpuntensysteem als een kandidaat gokt.

Subjectieve kansen

We kijken nu naar een andere manier van toetsen met vierkeuzevragen. Hierbij hoeft de kandidaat niet meer één antwoord te kiezen. In plaats daarvan vraagt men de kandidaat achter elk van de vier mogelijke antwoorden A , B , C en D de *subjectieve* kans op te schrijven.

Een kandidaat die bijvoorbeeld noteert $p_A = 0,2$; $p_B = 0,8$; $p_C = 0$; $p_D = 0$ geeft daarmee aan dat hij er vrij zeker van is dat B juist is, maar dat A ook nog zou kunnen, en dat C en D volgens hem zeker fout zijn.

De opgeschreven getallen p_A , p_B , p_C en p_D mogen natuurlijk niet negatief zijn en moeten bij elkaar opgeteld 1 zijn.

Bij iedere vraag wordt een *score* berekend die aangeeft ‘hoe dicht je bij het juiste antwoord zit’.

Als bijvoorbeeld C het juiste antwoord is, dan wordt de score berekend met de volgende formule:

$$\text{score} = 1 - (p_A^2 + p_B^2 + (1 - p_C)^2 + p_D^2)$$

Voor de gevallen waarbij A , B of D het juiste antwoord is, gelden soortgelijke formules. De maximale score is 1 en de minimale score is -1 .

Bij een bepaalde vraag is het juiste antwoord B . Een kandidaat die niet helemaal zeker van zijn zaak is, noteert bij deze vraag als subjectieve kansen:

$$p_A = 0,2; p_B = 0,7; p_C = 0; p_D = 0,1$$

- 4p **11** Bereken de score voor deze kandidaat bij deze vraag.

Stel dat bij een andere vraag C het juiste antwoord is. Een kandidaat haalt bij deze vraag de minimale score.

- 3p **12** Welke subjectieve kansen kan de kandidaat opgeschreven hebben achter de antwoorden A , B , C en D ? Vermeld alle mogelijkheden.

Een kandidaat moet een vraag beantwoorden maar heeft geen idee welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn. Er zijn heel veel mogelijkheden voor de kandidaat om die vraag te beantwoorden:

- *Mogelijkheid I:*

De kandidaat zou kunnen gokken op een antwoord door daar 1 achter te schrijven (en dus 0 achter de andere antwoorden). Het antwoord waarbij de kandidaat 1 heeft gezet, kan goed zijn. Dan is de score 1. Als het niet goed is, is de score -1 . De verwachte score is dan:

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot -1 = -0,50.$$

- *Mogelijkheid II:*

Hij kan ook op twee antwoorden gokken door achter ieder van die twee antwoorden $\frac{1}{2}$ te schrijven.

- *Mogelijkheid III:*

Hij kan ook op drie antwoorden gokken door achter ieder van die drie antwoorden $\frac{1}{3}$ te schrijven.

- *Mogelijkheid IV:*

En tenslotte kan hij ook op alle vier de antwoorden gokken door achter alle antwoorden $\frac{1}{4}$ te schrijven. Deze laatste mogelijkheid levert hem een score van 0,25 op.

Er zijn nog veel meer mogelijkheden om de vraag te beantwoorden. We kijken echter alleen naar de bovengenoemde vier mogelijkheden.

De score bij mogelijkheid IV is hoger dan de verwachte score bij mogelijkheid I.

Mogelijkheid IV is daarmee een ‘verstandiger’ strategie dan mogelijkheid I.

7p **13** □ Onderzoek welk van de mogelijkheden II, III en IV de meest verstandige strategie is.

Dit was de laatste vraag van het schriftelijk gedeelte. Ga verder met de vragen van het computergedeelte.



In deze opgave gebruiken we enkele Excelbestanden. Het kan zijn dat de uitkomsten van de berekeningen in de bestanden iets verschillen van de exacte waarden door afrondingen. Verder kunnen in de bestanden soms bepaalde waarden niet precies bereikt worden. In dat geval wordt de dichtstbijzijnde waarde gekozen.

Neem aan dat je een bedrag belegt in aandelen, waarvan de waarde elke maand met $\frac{2}{3}\%$ stijgt.

3p **14** Bereken met hoeveel procent de waarde van deze aandelen na één jaar is gestegen.

Stel je hebt maandelijks € 150 vrij te besteden. Je overweegt dat bedrag telkens in aandelen te beleggen. Dan zie je een advertentie van KoersSprint. “Dat is aantrekkelijk! Bij KoersSprint kun je aandelen kopen met geleend geld waarover je rente betaalt. Door gebruik te maken van de waardeinstijging van het aandelenpakket kun je dan behoorlijk veel winst maken.”

Hieronder zie je de advertentie.

advertentie



Met KoersSprint laat u het peloton achter u Doe mee voor slechts € 150 per maand

Het mooie van KoersSprint is dat u niet over een eigen kapitaal hoeft te beschikken. Zodra u besluit mee te doen, schieten wij u een bedrag van € 22 500 voor. Dit bedrag beleggen wij direct voor u in solide aandelen.

U betaalt slechts € 150 per maand als vergoeding (rente) voor het voorgeschoten bedrag.

U hebt direct het plezier van de mogelijke waardeinstijging van het totale pakket. Zo kan uw geld veel sneller groeien dan wanneer u maandelijks € 150 zou beleggen.

Na 5 jaar wordt de waarde van de belegging uitgekeerd, verminderd met het door ons voorgeschoten bedrag.

De uitkering na 5 jaar is hoger naarmate de aandelen meer in waarde zijn gestegen. Wanneer bijvoorbeeld de waarde van de aandelen jaarlijks met 12% stijgt, ontvangt u na vijf jaar € 17 153.

Meer rekenvoorbeelden vindt u op onze website.

De vraag is natuurlijk waarvoor je moet kiezen:

- voor beleggen via KoersSprint en elke maand € 150 betalen of
- voor zelf elke maand € 150 beleggen.

Het vervolg van deze opgave gaat over die keuze.

In het Excelbestand KOERSSPRINT-1.XLS is een deel van de in de advertentie genoemde website nagebouwd.



Open het Excelbestand KOERSSPRINT-1.XLS.

In dit bestand mag je alleen de schuifbalk gebruiken, dus niets invullen!

Bij de rekenvoorbeelden in de advertentie en op de website gaat men ervan uit dat de waarde van de via KoersSprint gekochte aandelen jaarlijks met een vast percentage stijgt. Er is dan dus sprake van exponentiële groei.

In het bestand kun je met de schuifbalk instellen hoeveel procent de waarde van de aandelen jaarlijks stijgt. De uitkering na vijf jaar wordt dan uitgerekend.

Het ingestelde percentage noemen we p . De uitkering na 5 jaar noemen we u . Zoals in de advertentie staat, wordt bij het percentage $p = 12$ de uitkering $u = € 17\,153$.



Zorg ervoor dat de schuifbalk op 12% staat.

- 3p **15** Laat met een berekening zien dat bij een waardeinstijging van 12% per jaar na vijf jaar inderdaad 17 153 euro wordt uitgekeerd, zoals op het scherm valt af te lezen.

Wie aan KoersSprint deelneemt, betaalt aan rente 60 keer € 150, dus in totaal € 9000.

- 3p **16** Het kan zijn dat het percentage p zo laag is, dat de uitkering u lager is dan deze € 9000. Onderzoek voor welke gehele waarden van p dit geldt.



Sluit het Excelbestand KOERSSPRINT-1.XLS en open het Excelbestand KOERSSPRINT-2.XLS.

Ook in dit bestand mag je alleen de schuifbalken gebruiken, dus niets invullen!

In KOERSSPRINT-2.XLS kun je net als in KOERSSPRINT-1.XLS het percentage p instellen waarmee de waarde van de via KoersSprint gekochte aandelen jaarlijks stijgt. Je ziet dan weer de uitkering van KoersSprint na 5 jaar.

Via KoersSprint beleggen betekent dat de deelnemer aan het eind van iedere maand € 150 rente aan KoersSprint betaalt. Die € 150 zou hij aan het eind van iedere maand ook zelf in aandelen kunnen beleggen. Om te berekenen wat het resultaat bij deze manier van beleggen is, hebben we het percentage waardeinstijging *per maand* nodig.

In KOERSSPRINT-2.XLS kun je daarom ook instellen hoeveel procent *per maand* de waarde van aandelen toeneemt bij zelf beleggen. Dit percentage noemen we m . Verder wordt in het bestand ook vermeld hoeveel procent per jaar overeenkomt met $m\%$ per maand. Dit komt later bij de jaarrendementbepaling verder aan de orde. Merk op dat dit percentage *niet* $12 \cdot m$ is.

Verder zie je het eindbedrag bij zelf beleggen. Dit wordt overgenomen uit de afgebeelde tabel. Wanneer je een waarde van m via de schuifbalk instelt, dan zie je in de tabel de ontwikkeling van het bedrag bij zelf beleggen. De vermelde bedragen $B(n)$ zijn telkens aan het eind van maand n , nadat de waardeinstijging van de afgelopen maand is bijgeteld en zojuist weer € 150 is belegd. Na 1 maand is juist de eerste € 150 belegd, maar is nog geen sprake van waardeinstijging. Na 60 maanden is juist de laatste € 150 belegd en staat er het eindbedrag.

Elke term van de rij $B(n)$ kan berekend worden met behulp van de vorige term en het percentage m waarmee de waarde per maand toeneemt.

- 3p **17** Leg uit hoe $B(18)$ berekend kan worden wanneer je $B(17)$ en m weet.

Jaarrendement

In KOERSSPRINT-1.XLS wordt het jaarrendement vermeld. Bij elke waarde van p hoort een jaarrendement. Zo is voor $p = 12$ bij een uitkering van € 17 153 na 5 jaar het jaarrendement 26,94%. (Je kunt dit controleren door het bestand even te openen en daarna weer te sluiten.) Dit percentage geeft aan wat de jaarlijkse waardeinstijging van de aandelen bij zelf beleggen zou moeten zijn om dezelfde opbrengst op te leveren als via beleggen bij KoersSprint.

Dat bij $p = 12$ het jaarrendement 26,94% is, betekent dus dat de waarde van de aandelen *bij zelf beleggen* met 26,94% per jaar zou moeten stijgen om ervoor te zorgen dat de waarde ervan na 5 jaar even groot (namelijk € 17 153) is als de uitkering bij KoersSprint.

In KOERSSPRINT-2.XLS kun je het jaarrendement bij een waardeinstijging p niet direct aflezen. Je kunt het vinden door m zo in te stellen dat na 5 jaar geldt:

$$\text{eindbedrag bij zelf beleggen} = \text{eindbedrag bij KoersSprint.}$$

De jaarlijkse waardeinstijging van de aandelen bij zelf beleggen is dan gelijk aan het jaarrendement.

In het bestand KOERSSPRINT-1.XLS kun je bij elk geheel percentage p (≥ 3) direct het bijbehorende jaarrendement zien. Met het bestand KOERSSPRINT-2.XLS kun je dit jaarrendement ook bepalen bij andere percentages. In KOERSSPRINT-2.XLS kun je p namelijk nauwkeuriger instellen. Daar is ook in de grafiek te zien of het eindbedrag via beleggen met KoersSprint (rode lijn) ongeveer gelijk is aan het eindbedrag (in blauw) bij zelf beleggen bij een in te stellen waardeverhogingspercentage per maand m . Om het jaarrendement preciezer te kunnen bestuderen, gebruiken we daarom het Excelbestand KOERSSPRINT-2.XLS.

- 3p **18** Neem aan dat de waarde van de via KoersSprint gekochte aandelen stijgt met 7,2% per jaar. Onderzoek met behulp van bestand KOERSSPRINT-2.XLS wat het jaarrendement is. Licht je werkwijze toe.

Zoals je al eerder hebt gezien, kan het voorkomen dat de uitkering van KoersSprint lager is dan het totaal van de maandelijks betaalde bedragen. Er is dan sprake van een negatief jaarrendement. Daarom kun je in het bestand voor m ook negatieve waarden instellen.

- 3p **19** Geef een voorbeeld van getallen p en m waarbij de waarde van de via KoersSprint gekochte aandelen nog wel stijgt ($p > 0$) maar het jaarrendement toch negatief is.

De afgelopen jaren daalden de aandelenkoersen en ontstonden er grote problemen bij bezitters van aandelen. Zo ook bij de deelnemers aan KoersSprint. Met het oog hierop kun je in het bestand ook voor p negatieve waarden instellen. Dan krijgen de deelnemers na 5 jaar helemaal niets uitgekeerd, maar hebben ze zelfs nog een schuld bij KoersSprint.

- 3p **20** Stel dat de waarde van de aandelen met 5% per jaar daalt. Onderzoek met behulp van het bestand hoe groot de schuld is die de deelnemer aan KoersSprint na afloop heeft.

We kijken nu naar het effect van de KoersSprint-constructie. We letten op het verschil tussen zelf beleggen en deelname aan KoersSprint. Daarbij gaan we ervan uit dat de jaarlijkse waardeverhoging of waardevermindering van de aandelen bij beide manieren van beleggen hetzelfde is. Misschien zou je verwachten dat het dan niets uitmaakt of je zelf belegt of deelneemt aan KoersSprint. Maar zoals je in het bestand kunt nagaan is er bij KoersSprint en zelf beleggen een duidelijk verschil in het uiteindelijke resultaat als de waarde van de aandelen 13,00% per jaar stijgt (m is dan gelijk aan 1,024).

Wanneer het percentage waarmee de waarde van de aandelen jaarlijks stijgt of daalt bij beide manieren van beleggen gelijk is, zijn de volgende situaties mogelijk:

- KoersSprint levert een hoger eindbedrag op dan zelf beleggen;
- KoersSprint levert eenzelfde eindbedrag op als zelf beleggen;
- KoersSprint levert een lager eindbedrag op dan zelf beleggen.

- 6p **21** Geef van elk van deze situaties een voorbeeld met bedragen in euro's. Noteer bij elk voorbeeld ook de waarden van p en van m .

Om meer inzicht te krijgen in het verband tussen het percentage p waarmee de waarde van de aandelen jaarlijks stijgt en het bijbehorende jaarrendement, kun je met behulp van KOERSSPRINT-1.XLS of KOERSSPRINT-2.XLS voor een aantal waarden van p het jaarrendement bepalen en de gevonden waarden in een grafiek verwerken.

Bij de waarden 5, 6, 10 en 12 voor p vinden we met de bestanden KOERSSPRINT-1.XLS of KOERSSPRINT-2.XLS respectievelijk de jaarrendementen $-14,92$; $-6,79$; $17,48$ en $26,94$. In tabel 1 zijn deze waarden ingevuld.

tabel 1

p	5	6		10		12
jaarrendement	$-14,92$	$-6,79$		$17,48$		$26,94$

Op de uitwerkbijlage staat dezelfde tabel. Die kun je verder invullen.

- 2p **22** Vul een waarde van p in tussen 6 en 10 met de bijbehorende waarde van het jaarrendement. Vul ook een waarde van p in tussen 10 en 12 met zijn bijbehorende waarde van het jaarrendement.

Het jaarrendement geeft aan met welk percentage de aandelen bij zelf beleggen in waarde *zouden moeten* stijgen om een even groot eindbedrag te krijgen als bij KoersSprint. In werkelijkheid lukt het personen echter doorgaans niet om door zelf te beleggen een beter aandelenpakket te kiezen met een grotere waardestijging dan bij KoersSprint. Daarom is deelname aan KoersSprint doorgaans gunstiger dan zelf beleggen als het jaarrendement hoger is dan de jaarlijkse waardestijging van de aandelen.

Van de resultaten in de tabel van vraag 22 kan men een grafiek maken van het verband tussen p en het jaarrendement.

- ^{2p} **23** Schets op de uitwerkbijlage de grafiek van het verband tussen p en het jaarrendement.
- ^{3p} **24** Leg uit met behulp van de grafiek voor welke waarden van p het doorgaans gunstiger is om bij KoersSprint te beleggen en wanneer het beter is om zelf te beleggen.



Sluit Excel af. Het bestand KOERSSPRINT-2.XLS niet opslaan.

Einde