wiskunde A1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 04

Tijdvak 1
Dinsdag 1 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 87 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 2, 9 en 11 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

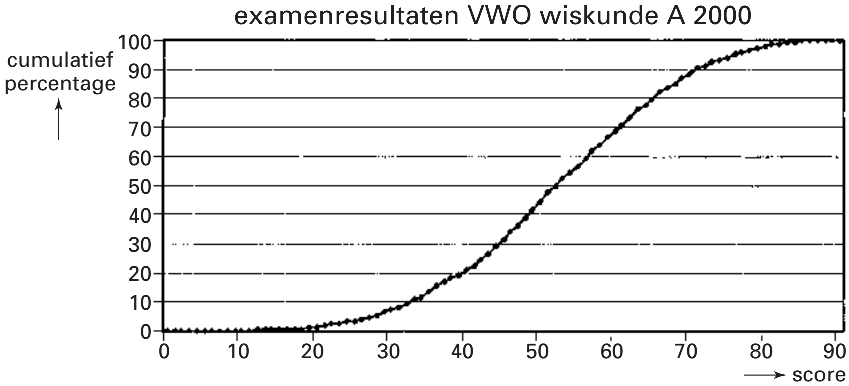
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Examenresultaten

Voor de invoering van de tweede fase bestonden de vakken wiskunde A en wiskunde B. In 2000 werden deze vakken voor het laatst op alle VWO-scholen geëxamineerd. Bij het Centraal Examen wiskunde A was de maximale score 90 punten. Zoals bij elk examen werden de behaalde resultaten onderzocht door middel van een grote landelijke steekproef. Van de 2255 kandidaten in de steekproef was er één met 0 punten en één met 88 punten. Niemand behaalde meer dan 88 punten. De uitkomst van de steekproef is in de vorm van een cumulatieve frequentiepolygoon weergegeven in figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Uit figuur 1 blijkt bijvoorbeeld dat 29% van de kandidaten een score van 45 punten of minder behaalde.

3p **1** ☐ Bereken met behulp van figuur 1 hoeveel kandidaten een score hadden die hoger was dan 65.

De uitkomst van de steekproef zou ook in de vorm van een boxplot weergegeven kunnen worden.

5p **2** ☐ Maak zo'n boxplot met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

De gemiddelde score in deze steekproef was 52,5 punten, met een standaardafwijking van 14,7 punten.

Vóór de tweede fase kwam het vrij vaak voor dat iemand zowel in wiskunde A als in wiskunde B examen deed. In deze steekproef gold dat voor 546 kandidaten. We noemen deze groep voor het gemak de A&B-groep. De scores voor wiskunde A van deze A&B-groep waren bij benadering normaal verdeeld, met een gemiddelde van 63,8 punten.

De leerlingen in de A&B-groep verschillen in aanleg voor wiskunde minder van elkaar dan de leerlingen in de hele steekproef. Daarom is het waarschijnlijk dat hun scores een kleinere spreiding vertonen.
Van de 546 kandidaten in de A&B-groep haalde 6% een onvoldoende, namelijk een score van 44 punten of minder voor wiskunde A. Voor de score X geldt dus: $P(X \leq 44{,}5) = 0{,}06$.

5p **3** ☐ Onderzoek of hieruit volgt dat de standaardafwijking van de scores van de A&B-groep kleiner is dan die van de hele steekproef.

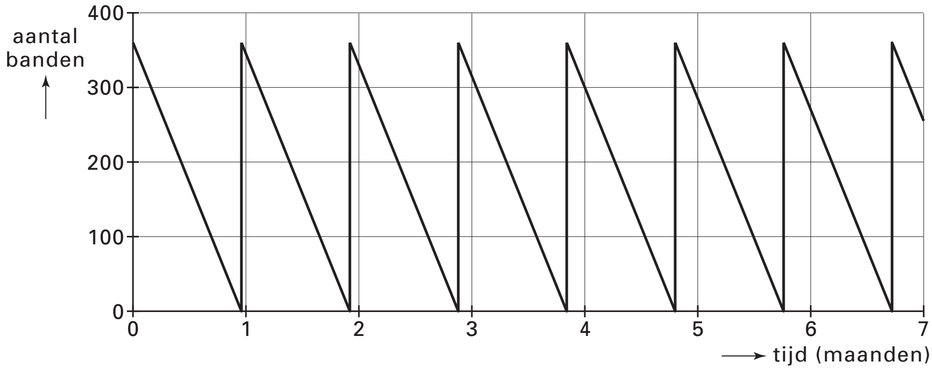
Een docent bekijkt deze cijfers en is er helemaal niet van overtuigd dat de A&B-leerlingen het zoveel beter deden dan alle A-leerlingen. Volgens hem is dat geringe aantal van 33 onvoldoendes veroorzaakt door de kleine steekproef van 546 kandidaten. Hij beweert dat de A&B-leerlingen het net zo goed deden als alle A-leerlingen.
Ga bij de volgende vraag ervan uit dat 29% van alle wiskunde A-leerlingen een onvoldoende scoorde voor het examen.

6p **4** ☐ Onderzoek of de bewering van de docent door de gegevens bevestigd wordt. Gebruik daarbij een significantieniveau van 5%.

Autobanden

De firma Nedtyre verkoopt een speciaal type autobanden aan garages, bandenspecialisten en autospeciaalzaken. Jaarlijks verkoopt Nedtyre 4500 banden van dit type.
Nedtyre koopt deze banden in bij de Italiaanse bandenfabriek Carrelli. Om de voorraad op peil te houden doet Nedtyre steeds bestellingen van 360 banden. We nemen aan dat de verkoop gelijkmatig over het jaar verdeeld is. Men zorgt ervoor dat de nieuwe bestelling telkens precies arriveert op het moment dat er geen banden meer in voorraad zijn. Dan zit er telkens 0,08 jaar, dus iets minder dan een maand, tussen twee opeenvolgende bestellingen.
De voorraad autobanden verloopt volgens de grafiek in figuur 2.

figuur 2



De voorraadkosten zijn evenredig met het aantal banden dat in voorraad is. De kosten om een band een jaar lang in voorraad te houden bedragen € 180.

3p **5** ☐ Toon aan dat de totale voorraadkosten volgens dit model € 32 400 per jaar bedragen.

De banden worden door Nedtyre voor € 70 per stuk verkocht. De inkoopprijs die Nedtyre betaalt, is € 30 per band. Bij het berekenen van de winst moet ook rekening worden gehouden met bovengenoemde voorraadkosten en met de leveringskosten. Deze leveringskosten bedragen € 3500 per bestelling.

3p **6** ☐ Laat met een berekening zien dat uit het voorgaande volgt dat Nedtyre gemiddeld per band een winst van ongeveer € 23,08 maakt. Je mag hierbij geen gebruik maken van de formule die later in deze opgave vermeld wordt.

De leveringskosten van € 3500 gelden voor elke bestelling, ongeacht het aantal bestelde banden. Ook het jaarlijks verkochte aantal van 4500 banden blijft voortdurend gelijk.
Nedtyre wil nu onderzoeken of de gemiddelde winst per band verhoogd kan worden door in plaats van 360 banden een ander aantal banden per keer te bestellen. Hierdoor zouden de totale kosten af kunnen nemen. Men maakt de volgende formule:

$$W = 40 - \frac{3500}{x} - 0,02x$$

Hierin is W de gemiddelde winst per band in euro's en x de bestelgrootte (het aantal banden dat telkens wordt besteld).

5p **7** ☐ Toon aan dat deze formule voor iedere bestelgrootte x juist is.

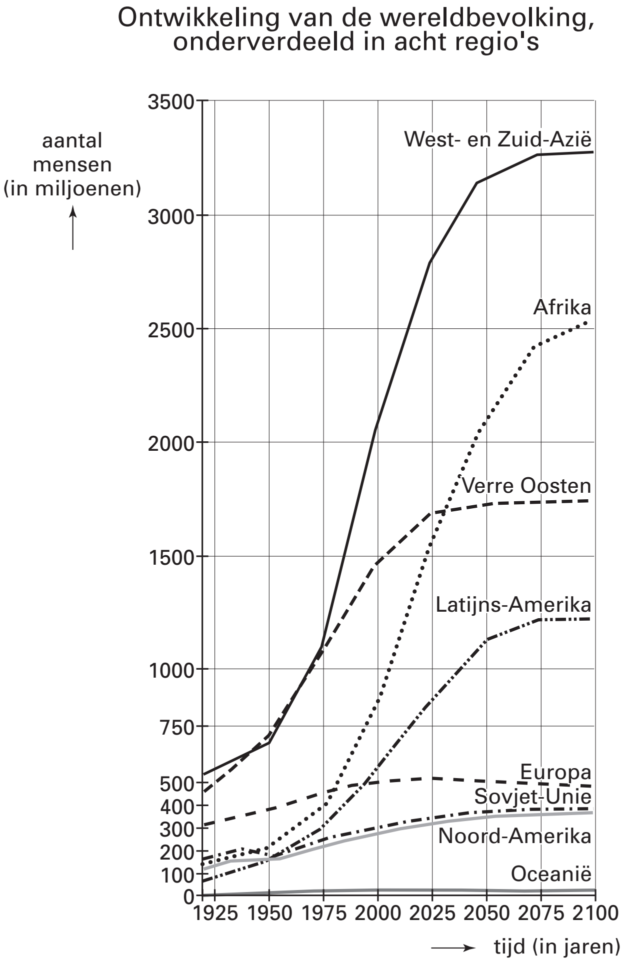
Nedtyre wil zo veel mogelijk winst per band maken.

5p **8** ☐ Stel de afgeleide van W op en bereken met behulp daarvan bij welke bestelgrootte x de gemiddelde winst per band maximaal is.

Bevolkingsgroei

De wereldbevolking neemt nog steeds toe, maar groeit niet in ieder werelddeel even hard. Figuur 3 laat zien hoe men in 1984 verwachtte dat de bevolking zich zou ontwikkelen. Deze figuur staat ook, vergroot, op de uitwerkbijlage.

figuur 3



In 2000 bedroeg de wereldbevolking 6,1 miljard mensen.

4p **9** ☐ Onderzoek of dit aantal in overeenstemming is met figuur 3. Gebruik daarbij eventueel de figuur op de uitwerkbijlage.

Onlangs stelde iemand het volgende model op om een ruwe schatting van de toekomstige wereldbevolking te maken:

$$B_n = B_{n-1} + 0{,}3B_{n-1}\left(1 - \frac{B_{n-1}}{10{,}9}\right) \text{ met } B_0 = 6{,}1.$$

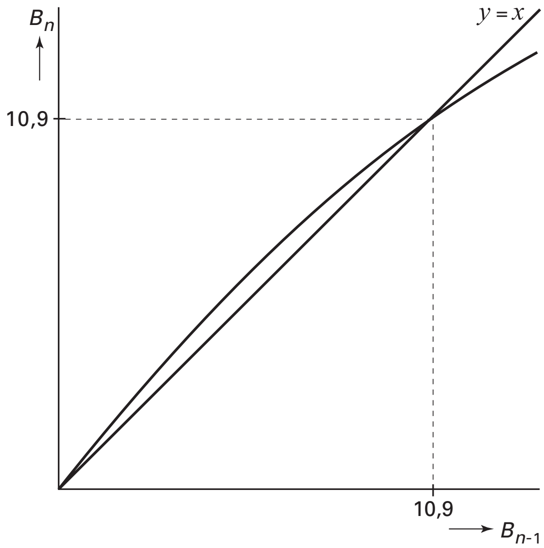
Hierin is B_n de wereldbevolking in miljarden mensen en n het aantal eenheden van 10 jaar na 2000. Dus B_0 is de wereldbevolking in 2000, B_1 de wereldbevolking in 2010, enzovoort. De volgende vragen hebben betrekking op dit model.

Volgens dit model zal de wereldbevolking op de lange duur een grenswaarde bereiken.

4p **10** ☐ Onderzoek of de wereldbevolking volgens dit model in 2050 minder dan 10% van deze grenswaarde verwijderd zal zijn.

Bij dit model kan een webgrafiek gemaakt worden. Zie figuur 4. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 4



3p **11** ☐ Teken de eerste drie stappen (dus van B_0 tot en met B_3) van de webgrafiek in de bijbehorende figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

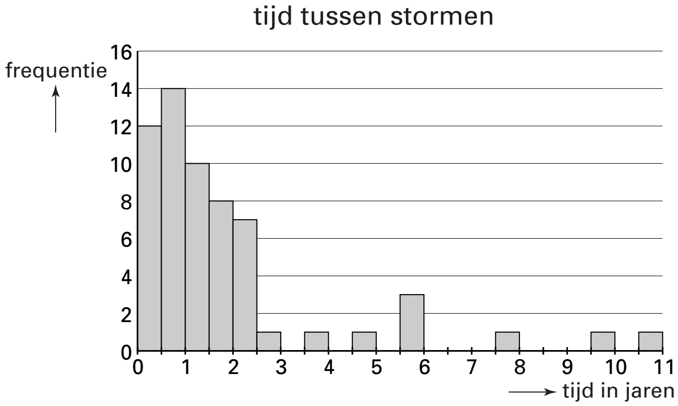
Of het model de toekomstige ontwikkeling redelijk beschrijft, moeten we nog afwachten. Wel kunnen we controleren of het model in overeenstemming is met de ontwikkeling vóór 2000. Zo is te berekenen hoe groot volgens de formule voor B_n de wereldbevolking in 1990 was.

4p **12** ☐ Voer deze berekening uit.

Orkanen

Orkanen zijn zeer zware stormen. Ze ontstaan boven de oceaan. Wanneer ze de kust bereiken, kunnen ze enorme schade aanrichten. De zuidoostkust van de Verenigde Staten wordt hier vrijwel elk jaar door geteisterd. In het gebied rond de Tampa Bay in Florida zijn gedurende een lange periode alle zware stormen geregistreerd. Het staafdiagram in figuur 5 is hierop gebaseerd.
Je kunt bijvoorbeeld zien dat het in deze periode drie keer is voorgekomen dat het na een zware storm $5\frac{1}{2}$ tot 6 jaar duurde tot de volgende zware storm.

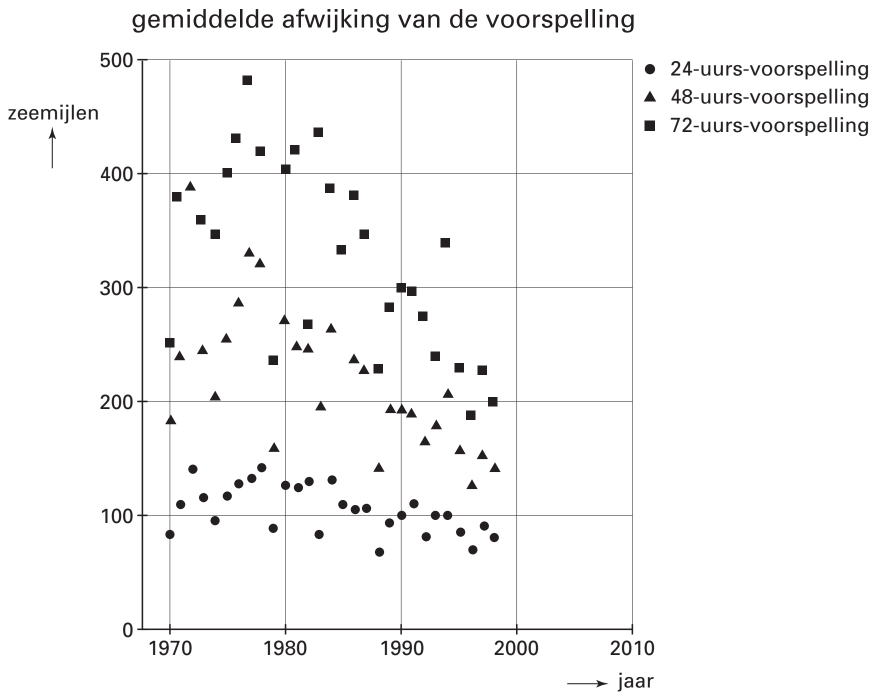
figuur 5



4p **13** □ Laat door een berekening zien dat er ruim 110 jaar zit tussen de eerste en de laatste zware storm waar figuur 5 betrekking op heeft.

Om bewoners van bedreigde kustgebieden tijdig te kunnen evacueren, doet het National Hurricane Center om de zes uur een voorspelling over de plaats waar de orkaan zich 24 uur later zal bevinden. Ook voorspelt het waar de orkaan 48 uur later en 72 uur later zal zijn. Achteraf wordt van iedere voorspelling nagegaan hoe groot de afstand is tussen de voorspelde plaats en de werkelijke plaats van de orkaan. Zo vindt men bij iedere voorspelling een afwijking. Deze afwijkingen worden gemeten in zeemijlen (1 zeemijl = 1853 meter).
Elk jaar wordt het gemiddelde berekend van de afwijkingen van de 24-uurs-voorspellingen en ook van de 48-uurs- en 72-uurs-voorspellingen. Deze gemiddelden zijn in figuur 6 weergegeven.

figuur 6



Het aantal voorspellingen verschilt sterk van jaar tot jaar. In 1970 is er slechts 3 keer een 72-uurs-voorspelling gedaan, in 1971 wel 118 keer. Ook de nauwkeurigheid van de voorspellingen wisselt sterk. Iemand meent zich te herinneren dat in 1970 of 1971 bij één van de 72-uurs-voorspellingen de afwijking wel 900 zeemijl was.

4p **14** ☐ Leg uit dat deze afwijking van 900 zeemijl niet in 1970 kan zijn voorgekomen.

In figuur 6 is te zien dat de 24-uurs-voorspellingen in de loop van de tijd steeds 'beter' worden. Om dit te bestuderen, worden twee modellen opgesteld.
Het volgende eenvoudige model stemt redelijk overeen met de werkelijkheid:

$$D = 125 - 1{,}3 \cdot t$$

Hierbij is D de gemiddelde afwijking in zeemijlen en t de tijd in jaren vanaf 1970.

Op de lange termijn voldoet dit model niet meer omdat de gemiddelde afwijking volgens dit eenvoudige model dan nul en zelfs negatief zou worden. Daarom is ook een ander model opgesteld dat aan dit bezwaar tegemoet komt:

$$D = \frac{67{,}6}{1 + 0{,}013 \cdot 1{,}183^t} + 52$$

4p **15** ☐ Onderzoek hoeveel de uitkomsten van deze twee modellen maximaal van elkaar verschillen in de periode 1970-2010.

Men wil ook voor de 48-uurs-voorspellingen een model opstellen van de vorm

$$D = \frac{a}{1 + 0{,}013 \cdot 1{,}183^t} + b$$

De opstellers stellen als voorwaarde dat de uitkomsten van dit model altijd groter moeten zijn dan de uitkomsten van het overeenkomstige model voor de 24-uurs-voorspellingen.
Persoon I denkt dat het daartoe voldoende is om als eis te stellen: $b > 52$.
Persoon II is van mening dat behalve aan deze eis ook voldaan moet worden aan de eis: $a + b > 119{,}6$.
Eén van beide personen heeft gelijk.

4p **16** ☐ Welke persoon heeft gelijk? Licht je antwoord toe.

Vierkeuzevragen

Bij vierkeuzevragen staan bij elke vraag vier mogelijke antwoorden: A, B, C en D. Slechts één daarvan is juist. Een kandidaat kan één van de vier antwoorden kiezen of de vraag onbeantwoord laten. Bij keuze van het juiste antwoord wordt 1 punt toegekend, in alle andere gevallen 0 punten. Als een kandidaat absoluut niet weet welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn, doet hij er daarom verstandig aan om toch een antwoord te kiezen. Dit leidt tot gokgedrag.
Daarom is ook wel eens geopperd om bij een onjuist antwoord strafpunten te geven. Een kandidaat heeft dan twee keuzes: niets invullen levert 0 punten op; wel iets invullen levert 1 punt op bij een juist antwoord en –0,5 punt (0,5 strafpunt) bij een onjuist antwoord.

3p **17** ☐ Bereken de verwachtingswaarde van de score *per vraag* bij dit strafpuntensysteem als een kandidaat gokt.

Subjectieve kansen
We kijken nu naar een andere manier van toetsen met vierkeuzevragen. Hierbij hoeft de kandidaat niet meer één antwoord te kiezen. In plaats daarvan vraagt men de kandidaat achter elk van de vier mogelijke antwoorden A, B, C en D de *subjectieve* kans op te schrijven.
Een kandidaat die bijvoorbeeld noteert $p_A = 0{,}2$; $p_B = 0{,}8$; $p_C = 0$; $p_D = 0$ geeft daarmee aan dat hij er vrij zeker van is dat B juist is, maar dat A ook nog zou kunnen, en dat C en D volgens hem zeker fout zijn.
De opgeschreven getallen p_A, p_B, p_C en p_D mogen natuurlijk niet negatief zijn en moeten bij elkaar opgeteld 1 zijn.

Bij iedere vraag wordt een *score* berekend die aangeeft 'hoe dicht je bij het juiste antwoord zit'.
Als bijvoorbeeld C het juiste antwoord is, dan wordt de score berekend met de volgende formule:

$$score = 1-\left(p_A{}^2 + p_B{}^2 + \left(1-p_C\right)^2 + p_D{}^2\right)$$

Voor de gevallen waarbij A, B of D het juiste antwoord is, gelden soortgelijke formules.
De maximale score is 1 en de minimale score is –1.

Bij een bepaalde vraag is het juiste antwoord B. Een kandidaat die niet helemaal zeker van zijn zaak is, noteert bij deze vraag als subjectieve kansen:

$$p_A = 0{,}2;\ p_B = 0{,}7;\ p_C = 0;\ p_D = 0{,}1$$

4p **18** ☐ Bereken de score voor deze kandidaat bij deze vraag.

Stel dat bij een andere vraag C het juiste antwoord is. Een kandidaat haalt bij deze vraag de minimale score.

3p **19** ☐ Welke subjectieve kansen kan de kandidaat opgeschreven hebben achter de antwoorden A, B, C en D? Vermeld alle mogelijkheden.

Een kandidaat moet een vraag beantwoorden maar heeft geen idee welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn. Er zijn heel veel mogelijkheden voor de kandidaat om die vraag te beantwoorden:

- *Mogelijkheid I*:
  De kandidaat zou kunnen gokken op een antwoord door daar 1 achter te schrijven (en dus 0 achter de andere antwoorden). Het antwoord waarbij de kandidaat 1 heeft gezet, kan goed zijn. Dan is de score 1. Als het niet goed is, is de score −1. De verwachte score is dan:
  $\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot -1=-0,50$.

- *Mogelijkheid II*:
  Hij kan ook op twee antwoorden gokken door achter ieder van die twee antwoorden $\frac{1}{2}$ te schrijven.

- *Mogelijkheid III*:
  Hij kan ook op drie antwoorden gokken door achter ieder van die drie antwoorden $\frac{1}{3}$ te schrijven.

- *Mogelijkheid IV*:
  En tenslotte kan hij ook op alle vier de antwoorden gokken door achter alle antwoorden $\frac{1}{4}$ te schrijven. Deze laatste mogelijkheid levert hem een score van 0,25 op.

Er zijn nog veel meer mogelijkheden om de vraag te beantwoorden. We kijken echter alleen naar de bovengenoemde vier mogelijkheden.
De score bij mogelijkheid IV is hoger dan de verwachte score bij mogelijkheid I. Mogelijkheid IV is daarmee een 'verstandiger' strategie dan mogelijkheid I.

7p **20** ☐ Onderzoek welk van de mogelijkheden II, III en IV de meest verstandige strategie is.

We vergelijken de antwoorden van twee personen op een vierkeuzevraag.
Tim snapt niets van de vraag en besluit bij ieder antwoord 0,25 in te vullen.
Tom weet zeker dat de antwoorden *B* en *D* onjuist zijn.
Zijn antwoord op deze vraag zal van de vorm zijn:

antwoord	subjectieve kans
A	a
B	0
C	$1-a$
D	0

Hierbij is a een getal tussen 0 en 1 (eventueel 0 of 1).

Stel dat antwoord *C* juist is. Of Tom bij deze vraag een hogere score haalt dan Tim hangt af van de gekozen waarde van a.

4p **21** ☐ Bereken voor welke waarden van a geldt dat Tom bij deze vraag een hogere score haalt dan Tim.

Einde