

Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 13 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Auto's moeten elk jaar gekeurd worden. Deze wettelijk verplichte keuring wordt APK, Algemene Periodieke Keuring, genoemd en wordt uitgevoerd door garagebedrijven. Om na te gaan of de garagebedrijven de keuringen goed uitvoeren, voert de RDW, de Rijks Dienst voor Wegverkeer, controles uit. De RDW doet dit steekproefsgewijs. Dat wil zeggen: van alle auto's die worden gekeurd door de garagebedrijven, selecteert de RDW er een aantal en onderwerpt die auto's aan een controle. Op deze wijze controleert de RDW 3% van alle gekeurde auto's.

Een garagebedrijf gaat op een dag 5 auto's keuren.

- 3p **1** Bereken de kans dat geen van deze 5 auto's door de RDW wordt gecontroleerd. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Voor het beoordelen van de kwaliteit van de garagebedrijven hanteert de RDW een puntensysteem:

Ieder garagebedrijf begint met 0 punten. Als bij controle door de RDW blijkt dat de keuring van een auto niet goed is verricht, krijgt het garagebedrijf 1,5 strafpunten. Als de keuring van een auto wel goed is uitgevoerd, krijgt het garagebedrijf 0,4 bonuspunten. Strafpunten en bonuspunten worden met elkaar verrekend. Als een garagebedrijf bijvoorbeeld 0,8 bonuspunten en 1,5 strafpunten heeft gekregen, levert dit 0,7 strafpunten op. Daarmee komt het aantal punten voor dit bedrijf op -0,7.

Garagebedrijf Hendriks heeft 0 punten. Bij dit bedrijf wordt 20% van de keuringen niet goed uitgevoerd. De RDW voert vijf keer een controle bij Hendriks uit.

- 4p **2** Bereken de kans dat garagebedrijf Hendriks na deze vijf controles meer dan 0 punten heeft. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Met behulp van het puntensysteem van de RDW kunnen we narekenen dat bij een garagebedrijf waar 15% van de keuringen niet goed wordt uitgevoerd, elke uitgevoerde controle gemiddeld 0,115 punten oplevert. Dus acht controles door de RDW leveren zo'n bedrijf naar verwachting 0,92 punten op.

Garagebedrijf Kampman voert slechts 10% van de keuringen niet goed uit. Acht controles door de RDW zullen dit garagebedrijf naar verwachting meer punten opleveren.

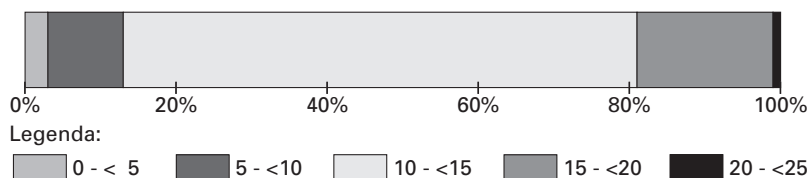
Garagebedrijf Kampman heeft 0 punten.

- 4p **3** Bereken hoeveel punten garagebedrijf Kampman naar verwachting zal hebben nadat de acht controles zijn uitgevoerd.

Mede door de APK neemt de gemiddelde levensduur van personenauto's toe. In het begin van de jaren negentig van de vorige eeuw was een personenauto na 9 à 10 jaar rijp voor de sloop. In 1998 lag de gemiddelde levensduur al een stuk hoger. Deze gemiddelde levensduur kun je berekenen met behulp van de gegevens in figuur 1. Daarin vind je in de vorm van een samengesteld staafdiagram de verdeling naar leeftijd van de personenauto's die in 1998 werden gesloopt.

figuur 1

leeftijd sloopauto's in jaren



- 4p **4** Bereken met behulp van de gegevens in figuur 1 hoe groot in 1998 de gemiddelde levensduur was van personenauto's op het moment van slopen.

Kaartspel

Een set speelkaarten bestaat uit 52 kaarten, verdeeld in de soorten schoppen (♠), harten (♥), ruiten (♦) en klaveren (♣). Iedere soort bevat 13 kaarten, met de opdruk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer of aas.

figuur 2



Een voorbeeld van 3 hartenkaarten, 4 klaverenkaarten, 4 ruitenkaarten en 2 schoppenkaarten.

Het kaartspel bridge wordt gespeeld door vier spelers, die ieder 13 kaarten krijgen. Zie figuur 2.

We gaan er bij deze opgave van uit dat het delen van de kaarten op aselechte wijze gebeurt. Dat betekent dat bij elk spel iedere speler evenveel kans heeft op een bepaalde kaart.

De 52 kaarten kunnen op zeer veel verschillende manieren onder de vier spelers verdeeld worden.

- 4p **5** Onderzoek of dit aantal manieren groter is dan $5 \cdot 10^{25}$.

Arie, Bert, Clemens en Douwe spelen bridge.

De kans dat Clemens bij een spel precies twee klaverenkaarten krijgt, is ongeveer 0,2.

- 4p **6** Bereken deze kans in vier decimalen nauwkeurig.

Arie heeft gedurende een lange periode bijgehouden hoeveel klaverenkaarten hij bij elk spel kreeg. Het resultaat van 10 000 spellen vind je in tabel 1.

tabel 1

| aantal klaverenkaarten | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 of meer |
|------------------------|-----|-----|------|------|------|------|-----|----|----|-----------|
| frequentie | 130 | 802 | 2060 | 2865 | 2385 | 1245 | 414 | 87 | 12 | 0 |

Het gemiddelde aantal klaverenkaarten dat Arie bij deze 10 000 spellen kreeg, komt vrijwel overeen met het aantal klaverenkaarten dat je per spel kunt verwachten.

- 4p **7** Toon dit met een berekening aan.

Het aantal van 10 000 spellen is erg groot. Dat betekent dat we de uitkomsten in tabel 1 goed kunnen gebruiken om de theoretische kansen op de bijbehorende aantallen klaverenkaarten te benaderen.

- 3p **8** Gebruik tabel 1 om de kans te berekenen dat je in 10 spellen precies één keer géén klaverenkaarten krijgt. Rond je antwoord af op vier decimalen.

Het aantal klaverenkaarten dat iemand per spel krijgt, is bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 3,25 en standaardafwijking 1,365.

Douwe wil de kans op ten hoogste 4 klaverenkaarten op twee manieren uitrekenen:

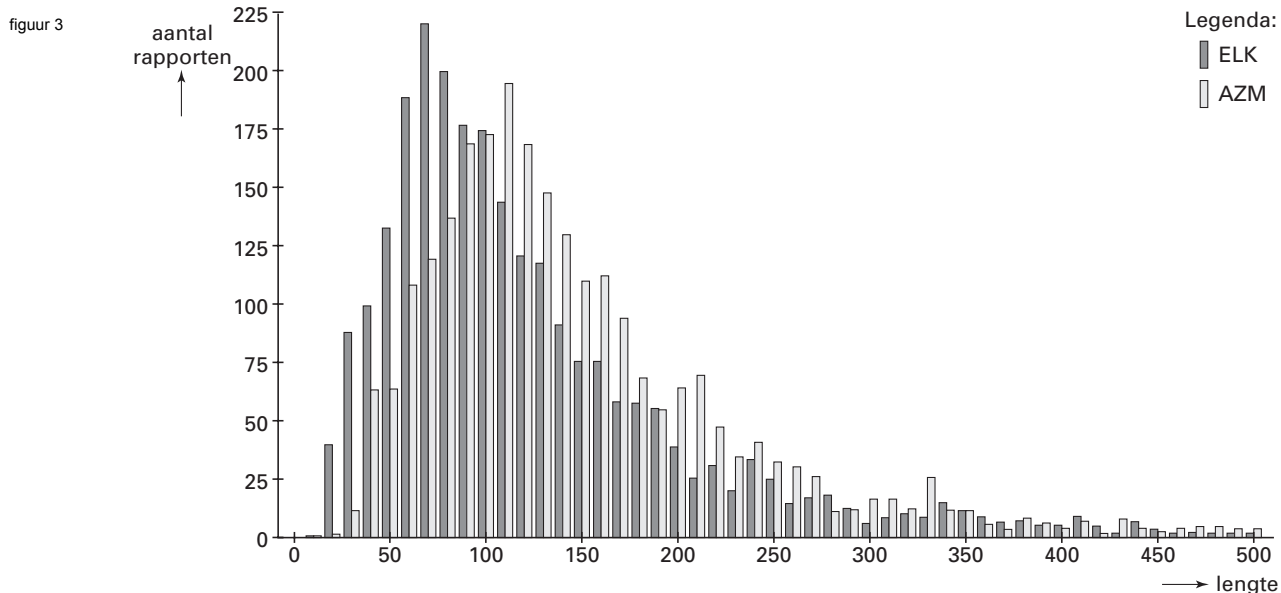
- met behulp van deze normale verdeling;
- met behulp van tabel 1.

Beide uitkomsten zullen niet veel van elkaar verschillen.

- 5p **9** Onderzoek of dit verschil kleiner is dan 0,01.

Teksten vergelijken

In ziekenhuizen worden vaak medische rapporten geschreven. Bij een onderzoek naar de inhoud van dergelijke rapporten zijn 2500 rapporten van het Elkerliek Ziekenhuis (ELK) te Deurne vergeleken met 2500 rapporten van het Academisch Ziekenhuis Maastricht (AZM). Van elk rapport is de lengte bepaald; de lengte van een rapport is het aantal woorden dat het bevat. In figuur 3 zijn de gegevens weergegeven in een gecombineerd staafdiagram met klassenbreedte 10.



Voor de lengte van de rapporten van de ene verzameling geldt:

I *1e kwartiel is 68, mediaan is 100 en 3e kwartiel is 149*

Voor de lengte van de rapporten van de andere verzameling geldt:

II *1e kwartiel is 92, mediaan is 127 en 3e kwartiel is 184*

- 3p **10** □ Welke van deze series gegevens, I of II, hoort bij de rapporten van het ELK? Licht je antwoord toe.

Uit het onderzoek bleek dat de mediaan en het gemiddelde die horen bij de rapporten van het AZM niet even groot zijn.

- 4p **11** □ Geef met een redenering, dus zonder een berekening, aan of de mediaan groter of kleiner is dan het gemiddelde.

De rapporten van beide ziekenhuizen bevatten samen 996 734 woorden. Toch waren er in totaal slechts ongeveer 20 000 verschillende woorden. Dit komt omdat er woorden zijn die heel vaak gebruikt worden. Om je hiervan een idee te geven zie je in tabel 2 de tien woorden die het meest frequent in de rapporten werden gebruikt.

tabel 2

| woord | een | de | van | met | en | het | in | is | ik | geen |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| frequentie | 40361 | 36485 | 34231 | 27667 | 26869 | 22965 | 22082 | 13681 | 11416 | 11363 |
| rangnummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Je ziet dat in de tabel de woorden op *rangnummer*, in volgorde van hun frequentie, zijn genoemd. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat het woord ‘met’ in totaal 27 667 keer is geteld en dat dit woord rangnummer 4 heeft.

De onderzoekers J. B. Estoup en G. K. Zipf hebben geprobeerd in allerlei teksten een verband te vinden tussen het rangnummer r van een woord en de bijbehorende frequentie f_r . In 1949 vond Zipf de formule:

$$f_r = \frac{C}{r}$$

Deze formule wordt ook wel de ‘wet van Zipf’ genoemd.

De waarde van C hangt af van het totale aantal woorden in de tekst. Volgens Zipf is C de oplossing van de vergelijking:

$$2,3 \cdot C \cdot \log C = \text{aantal woorden in de tekst}$$

De rapporten van het AZM bevatten samen 495 378 woorden.

- 3p **12** Bereken de waarde van C die bij de rapporten van het AZM hoort. Rond af op duizendtallen.

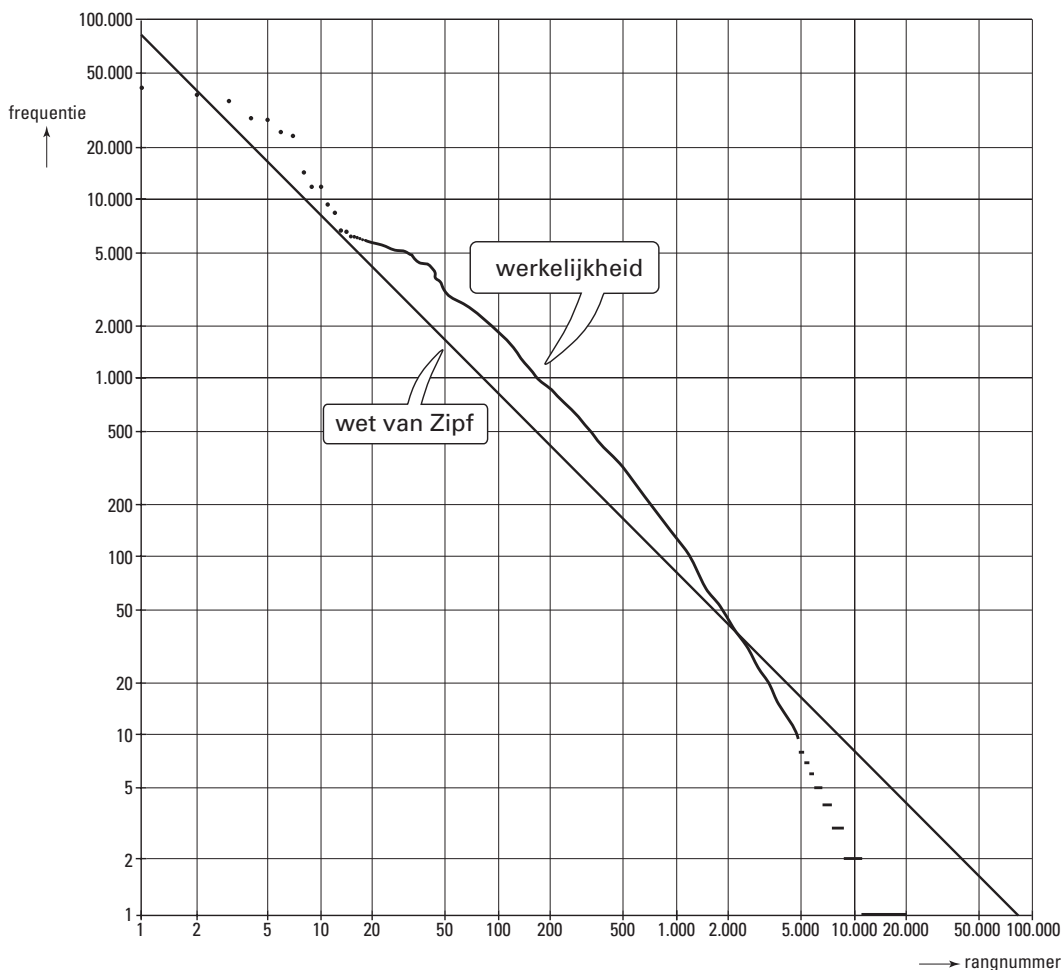
Voor de 996 734 woorden in de rapporten van beide ziekenhuizen *samen* geldt $C = 88\,000$.

In figuur 4 zijn van alle gebruikte woorden de frequenties uitgezet tegen de rangnummers. Op beide assen is gekozen voor een logaritmische schaalverdeling. De woorden uit tabel 2 vind je in figuur 4 terug als de bovenste 10 punten.

Om de wet van Zipf en de werkelijkheid met elkaar te kunnen vergelijken, is in figuur 4 ook

de grafiek van $f_r = \frac{88000}{r}$ getekend. Figuur 4 is ook afgedrukt op de uitwerkbijlage.

figuur 4



De wet van Zipf geldt voor algemene teksten zoals krantenartikelen en dergelijke. Omdat medische rapporten niet ‘algemeen’ zijn, vertonen de grafieken opmerkelijke verschillen. Tussen de rangnummers 2 en (ongeveer) 2200 zijn de werkelijke frequenties groter dan de frequenties volgens de wet van Zipf.

- 4p **13** Onderzoek of dit verschil bij $r = 100$ groter is dan bij $r = 500$. Licht je antwoord toe.

Al doende leert men

In de Amerikaanse industrie is ooit onderzocht hoe snel werknemers leren wanneer zij een handeling vaker verrichten. Bij een groot aantal werknemers is bijgehouden hoeveel tijd ze nodig hadden om een bepaalde handeling voor de eerste keer te verrichten, hoeveel tijd voor de tweede keer, enz.

Zo bleken werknemers 16 minuten nodig te hebben om handeling A voor de eerste keer te verrichten. Bij de tweede keer was die handelingstijd 12,8 minuten. Dus wanneer een werknemer handeling A twee keer heeft uitgevoerd, is zijn gemiddelde handelingstijd $\frac{16+12,8}{2} = 14,4$ minuten. Deze 14,4 minuten zie je in tabel 3. De andere waarden in deze tabel zijn op een vergelijkbare manier berekend.

tabel 3

| | | | | | | |
|--|----|------|------|------|------|------|
| aantal keren dat handeling A is verricht (n) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| gemiddelde handelingstijd in minuten | 16 | 14,4 | 13,1 | 12,1 | 11,3 | 10,7 |

Met behulp van tabel 3 kunnen we berekenen dat een werknemer 8,1 minuten nodig heeft om handeling A voor de 5e keer te verrichten.

3p **14** □ Geef zo'n berekening.

Wanneer we de gemiddelde handelingstijd H_n willen uitrekenen voor meer dan 6 handelingen is het handig te beschikken over een formule voor H_n . Hiertoe zijn verschillende pogingen ondernomen. Eén zo'n poging resulteerde in de formule:

$$H_n = 0,14n^2 - 2n + 17,8$$

Deze formule komt redelijk overeen met de gegevens van tabel 3 voor $n = 1$ tot en met $n = 6$.

3p **15** □ Bereken het grootste verschil tussen de uitkomsten uit tabel 3 en de bijbehorende waarden van H_n .

Voor grote waarden van n is de formule voor H_n echter niet geschikt om de gemiddelde handelingstijd te beschrijven.

4p **16** □ Leg uit waarom de formule voor H_n niet geschikt is.

Het is niet zo eenvoudig een formule voor H_n te vinden die wel voldoet.

Toch kunnen we bijvoorbeeld de gemiddelde handelingstijd na 10 handelingen uitrekenen. Daarbij maken we gebruik van T_n , de tijd die een werknemer nodig heeft om handeling A voor de n -de keer te verrichten. T_n kan goed worden benaderd met de formule:

$$T_n = 6 + 14,7 \cdot 0,68^n$$

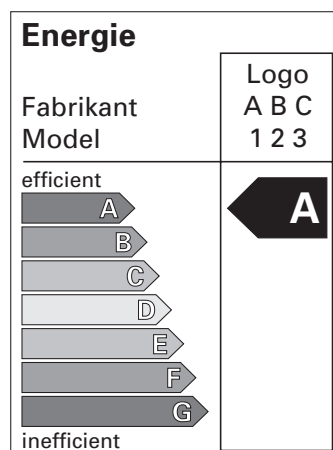
In deze formule is T_n in minuten. Inderdaad levert deze formule $T_1 \approx 16$ en $T_2 \approx 12,8$. Met deze formule kunnen we ook andere handelingstijden uitrekenen en dus ook gemiddelde handelingstijden berekenen.

4p **17** □ Bereken hoe groot de gemiddelde handelingstijd is wanneer een werknemer 10 keer handeling A heeft uitgevoerd.

Koelkasten

Tegenwoordig worden koelkasten voorzien van een energiesticker. Op deze sticker staat vermeld in welke energieklassen de koelkast zit. Deze energieklassen worden aangegeven met de letters A tot en met G. Een koelkast in klasse A gebruikt weinig energie, een koelkast in klasse G gebruikt veel energie. In figuur 5 zie je een voorbeeld van zo'n sticker die hoort bij een koelkast uit energieklassen A.

figuur 5



een energiesticker

Om te bepalen in welke energieklassen een koelkast moet worden ingedeeld, wordt het energieverbruik vergeleken met het zogenaamde *standaardenergieverbruik* van dat type koelkast. Hiermee berekent men de *EEI*, de *energie-efficiëntie-index* van de koelkast. Dat gebeurt met behulp van de volgende formule:

$$EEI = \frac{\text{energieverbruik van de koelkast}}{\text{standaardenergieverbruik van de koelkast}} \cdot 100\%$$

De waarde van deze *EEI* bepaalt in welke energieklassen de koelkast wordt ingedeeld. Zie tabel 4.

tabel 4

| energie-efficiëntie-index <i>EEI</i> | klasse |
|--------------------------------------|--------|
| minder dan 55% | A |
| 55% - < 75% | B |
| 75% - < 90% | C |
| 90% - < 100% | D |
| 100% - < 110% | E |
| 110% - < 125% | F |
| meer dan 125% | G |

3p 18 □

Een koelkast heeft een energieverbruik van 330 kWh per jaar en is ingedeeld in klasse B. Bereken de grootst mogelijke waarde van het bijbehorende *standaardenergieverbruik*.

Om het gebruik van energiezuinige koelkasten te stimuleren, geeft de overheid subsidie voor koelkasten in klasse A. Bij aanschaf van een koelkast in klasse A krijgt de koper € 50 subsidie.

Van twee koelkasten, de Freezer en de Icebox, zijn enkele gegevens bekend. Zie tabel 5.

tabel 5

| koelkast | <i>EEI</i> | aanschafprijs zonder subsidie | verbruik per jaar |
|----------|------------|-------------------------------|-------------------|
| Freezer | 60% | € 795 | 480 kWh |
| Icebox | 49% | € 995 | 360 kWh |

De prijs van elektriciteit is € 0,20 per kWh.

De Icebox is duurder in aanschaf, maar verbruikt minder energie in vergelijking met de Freezer. Dat betekent dat na verloop van tijd de extra investering in de Icebox zal zijn terugverdiend.

In januari van het jaar 2000 heeft iemand een Icebox gekocht.

5p 19 □

Bereken in welke maand van welk jaar de extra investering in de Icebox zal zijn terugverdiend.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Bij de berekening van de *EEI* moeten we weten hoe groot het *standaardenergieverbruik* van een koelkast is. Dit wordt voor elk type koelkast apart uitgerekend. Hiervoor gebruikt men de volgende formule:

$$\text{standaardenergieverbruik} = m \cdot GV + n$$

In deze formule is *GV* het *Gecorrigeerd Volume*; dit wordt berekend met de formule:

$$GV = K + s \cdot V$$

In deze formule is *K* het volume van de koelruimte en *V* het volume van de vriesruimte, beide in liters.

Om deze twee formules te kunnen gebruiken, hebben we dus de waarden van *m*, *n* en *s* nodig. In tabel 6 staan voor een aantal categorieën koelkasten deze waarden aangegeven.

tabel 6

| categorie | <i>m</i> | <i>n</i> | <i>s</i> |
|--------------------------------------|----------|----------|----------|
| koelkast zonder vriesruimte | 0,233 | 245 | - |
| koelkast met vriesruimte zonder ster | 0,233 | 245 | 1,25 |
| koelkast met vriesruimte * | 0,643 | 191 | 1,55 |
| koelkast met vriesruimte ** | 0,450 | 245 | 1,85 |

Voor elke categorie koelkasten is de formule voor het *standaardenergieverbruik* van de vorm:

$$\text{standaardenergieverbruik} = a \cdot K + b \cdot V + c$$

Hierbij zijn *a*, *b* en *c* constanten. Ook hier is *K* weer de inhoud van de koelruimte en *V* de inhoud van de vriesruimte, beide in liters.

5p **20** □ Hoe groot zijn de constanten *a*, *b* en *c* voor de categorie koelkasten met vriesruimte ** ?

Er bestaan ook koelkasten met vriesruimte ***. Voor deze categorie koelkasten geldt de formule:

$$\text{standaardenergieverbruik} = 0,657 \cdot K + 1,41255 \cdot V + 235$$

Een fabrikant van koelkasten wil een nieuw type koelkast met vriesruimte *** op de markt brengen. Dit nieuwe type moet voldoen aan de volgende voorwaarden:

- de koelkast hoort in energieklassen A;
- het jaarlijks energieverbruik is 187 kWh;
- de koelruimte is vier maal zo groot als de vriesruimte.

4p **21** □ Onderzoek hoe groot de inhoud van de vriesruimte moet zijn om aan deze voorwaarden te voldoen.

Einde