

Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.  
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.  
Voor de uitwerking van vraag 6 is een uitwerkbijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

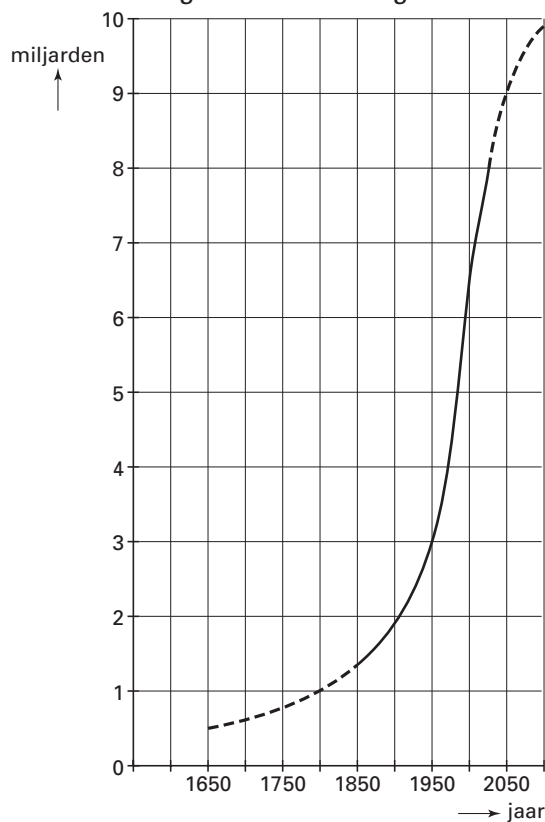
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

# Bevolkingsgroei

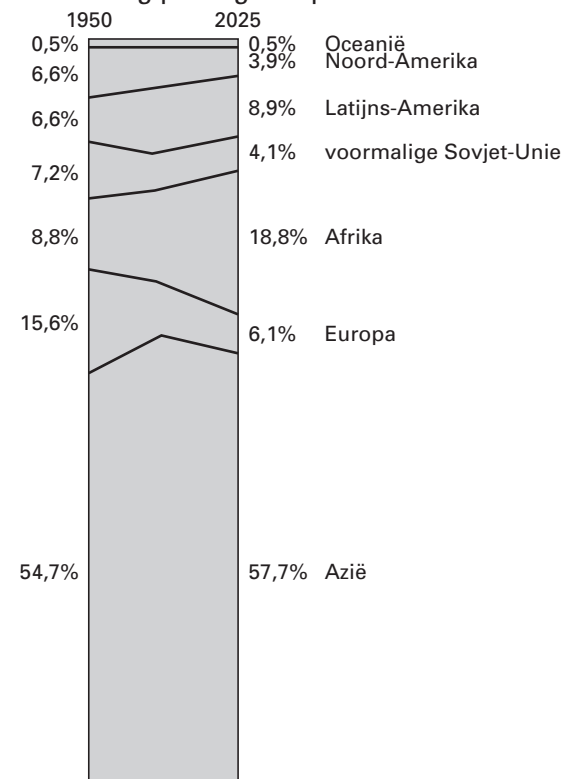
Begin jaren negentig verscheen in NRC Handelsblad een artikel over de bevolkingsgroei en de gevolgen van deze groei. Bij dit artikel werden onder andere de onderstaande figuren 1A, 1B, 1C en 1D afgebeeld.

figuren 1A, 1B, 1C en 1D

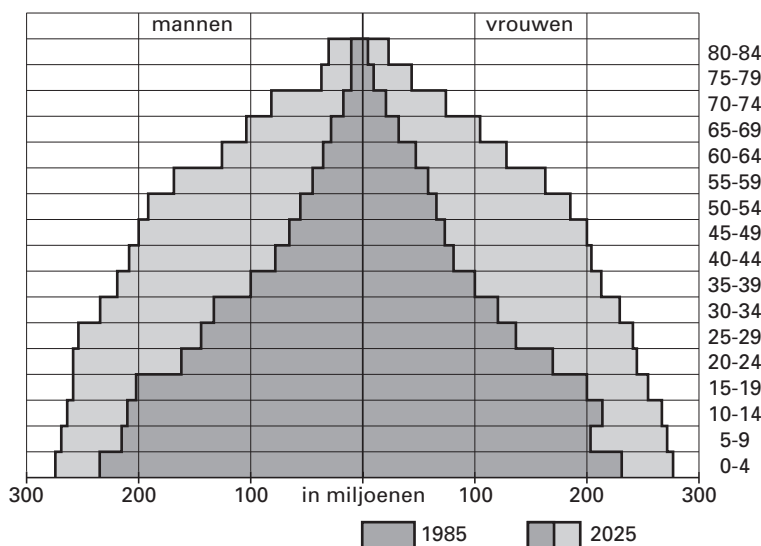
A ontwikkeling wereldbevolking



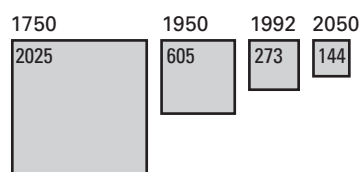
B verdeling per regio in procenten



C verdeling naar leeftijd in ontwikkelingslanden



D bewoonbare aarde in m<sup>2</sup> per persoon



In figuur 1A zie je de groei van de totale wereldbevolking; in figuur 1B de verdeling van de wereldbevolking over de verschillende regio's in 1950 en de verwachte verdeling in 2025.

In figuur 1B lijkt het erop alsof het aantal mensen in Europa in 2025 naar verwachting kleiner zal zijn dan in 1950. Uit de gegevens in de figuren 1A en 1B samen blijkt echter dat dit niet klopt.

4p **1**  Toon dit laatste met een berekening aan.

In het genoemde artikel werd vermeld dat de bevolkingsgroei in Afrika 3% per jaar was.

5p **2**  Onderzoek of het volgens de figuren 1A en 1B mogelijk is dat gedurende de gehele periode van 1950 tot 2025 de bevolkingsgroei in Afrika 3% per jaar is.

In figuur 1C zie je de leeftijdsopbouw in de ontwikkelingslanden in 1985 (binnenste deel van de figuur) en de verwachte leeftijdsopbouw in 2025 (gehele figuur).

Voor de ontwikkelingslanden geldt dat de verwachte gemiddelde leeftijd in 2025 hoger is dan de gemiddelde leeftijd in 1985.

3p **3**  Leg uit hoe dit blijkt uit figuur 1C. Een berekening is hierbij niet vereist.

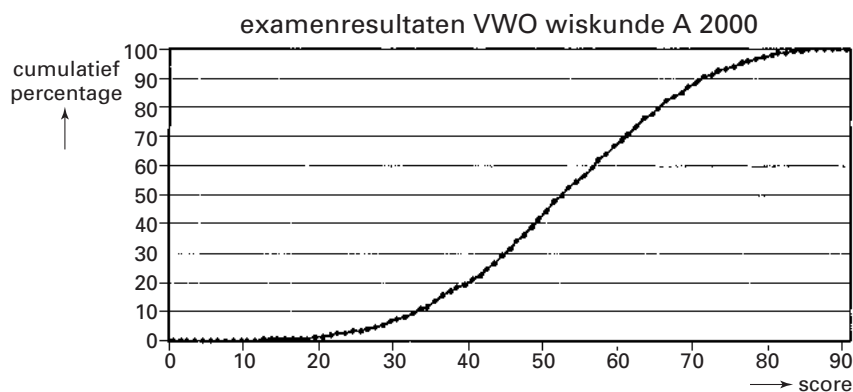
In figuur 1D zie je dat de hoeveelheid bewoonbare aarde per persoon in de periode 1750-2050 afneemt.

4p **4**  Onderzoek of de afname van de hoeveelheid bewoonbare aarde per persoon in deze periode uitsluitend het gevolg is van de groei van de wereldbevolking.

## Examenresultaten

Voor de invoering van de tweede fase bestonden de vakken wiskunde A en wiskunde B. In 2000 werden deze vakken voor het laatst op alle VWO-scholen geëxamineerd. Bij het Centraal Examen wiskunde A was de maximale score 90 punten. Zoals bij elk examen werden de behaalde resultaten onderzocht door middel van een grote landelijke steekproef. Van de 2255 kandidaten in de steekproef was er één met 0 punten en één met 88 punten. Niemand behaalde meer dan 88 punten. De uitkomst van de steekproef is in de vorm van een cumulatieve frequentiepolygoon weergegeven in figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Uit figuur 2 blijkt bijvoorbeeld dat 29% van de kandidaten een score van 45 punten of minder behaalde.

- 3p **5**  Bereken met behulp van figuur 2 hoeveel kandidaten een score hadden die hoger was dan 65.

De uitkomst van de steekproef zou ook in de vorm van een boxplot weergegeven kunnen worden.

- 5p **6**  Maak zo'n boxplot met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

De gemiddelde score in deze steekproef was 52,5 punten, met een standaardafwijking van 14,7 punten.

Vóór de tweede fase kwam het vrij vaak voor dat iemand zowel in wiskunde A als in wiskunde B examen deed. In deze steekproef gold dat voor 546 kandidaten. We noemen deze groep voor het gemak de A&B-groep. De scores voor wiskunde A van deze A&B-groep waren bij benadering normaal verdeeld, met een gemiddelde van 63,8 punten.

De leerlingen in de A&B-groep verschillen in aanleg voor wiskunde minder van elkaar dan de leerlingen in de hele steekproef. Daarom is het waarschijnlijk dat hun scores een kleinere spreiding vertonen.

Van de 546 kandidaten uit de A&B-groep haalde 6% een score van 44 punten of minder voor wiskunde A, zodat voor de score  $X$  geldt:  $P(X \leq 44,5) = 0,06$ .

- 5p **7**  Onderzoek of hieruit volgt dat de standaardafwijking van de scores van de A&B-groep kleiner is dan die van de hele steekproef.

In 2000 was er een apart examen wiskunde A voor 125 kandidaten die waren opgeleid volgens een experimenteel programma ter voorbereiding op de tweede fase. Zo mochten ze, anders dan de overige kandidaten, een grafische rekenmachine gebruiken. De examenopgaven waren grotendeels hetzelfde.

Ter vergelijking kijken we naar het aantal onvoldoendes. Bij het gewone examen had 29% van de kandidaten een onvoldoende. Bij het experimentele examen waren er 30 kandidaten met een onvoldoende.

- 3p **8**  Bereken de kans dat van 125 aselekt gekozen deelnemers aan het gewone examen ten hoogste 30 deelnemers een onvoldoende behaalden.

De 125 deelnemers van het experimentele examen scoorden gemiddeld 54,92 punten. We willen dit vergelijken met de resultaten van het gewone examen. Hierbij nemen we aan dat de scores van het gewone examen normaal verdeeld zijn met gemiddelde 52,5 punten en standaardafwijking 14,7 punten.

- 5p **9**  Bereken de kans dat 125 aselekt gekozen deelnemers aan het gewone examen gemiddeld ten minste 54,92 punten behaalden.

## Kleine ondernemers

Over de meeste goederen en diensten is BTW (Belasting op de Toegevoegde Waarde) verschuldigd. Ondernemers ontvangen deze BTW van hun klanten, maar ze dragen ook BTW af aan hun leveranciers. Wanneer ze in een jaar meer BTW ontvangen dan ze afdragen, moeten ze het verschil afdragen aan de Belastingdienst.

Voor kleine ondernemers geldt een verminderingsregeling. In een brochure van de Belastingdienst uit 2000 staat het als volgt beschreven:

tekst

Hoeveel belastingvermindering u precies kunt krijgen, hangt af van het BTW-bedrag dat u aan de Belastingdienst zou moeten afdragen als u de regeling niet zou toepassen. Hieronder leest u voor hoeveel vermindering u in aanmerking kunt komen.

### Vermindering voor kleine ondernemers in guldens

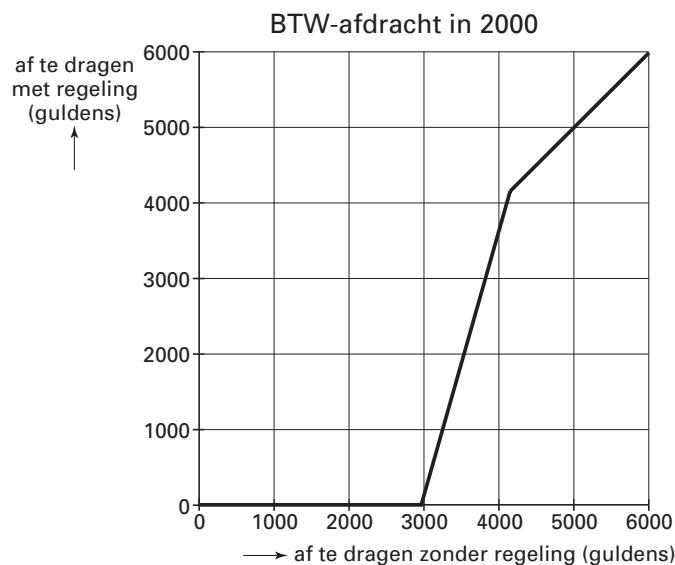
Hoeveel BTW zou u per jaar moeten afdragen aan de Belastingdienst?	Hoeveel vermindering kunt u krijgen?
Meer dan f 4150	Geen vermindering
f 4150 of minder, maar meer dan f 2964	Vermindering van af te dragen BTW: $2,5 \times (f 4150 - (\text{BTW-bedrag}))$
f 2964 of minder	De vermindering is gelijk aan het BTW-bedrag. U hoeft dus geen BTW af te dragen.

We kijken naar twee ondernemers die BTW afdragen over het jaar 2000. Zonder de hierboven beschreven regeling zou ondernemer A 3500 gulden BTW moeten afdragen en ondernemer B 3700 gulden. Dankzij de regeling hoeven beide ondernemers slechts een deel hiervan af te dragen. Toch is ondernemer B niet helemaal tevreden. Zonder de regeling zou hij 200 gulden meer af moeten dragen dan ondernemer A, maar door toepassing van de regeling wordt het verschil veel groter.

5p **10**  Bereken hoeveel gulden B uiteindelijk meer moet afdragen dan A.

In figuur 3 staat de grafiek van het verband tussen het bedrag dat zonder de regeling moet worden afgedragen en het bedrag dat na toepassing van de regeling afgedragen moet worden.

figuur 3



Voor de volgende vraag stelt  $x$  het bedrag voor dat zonder deze regeling moet worden afgedragen. Zie de horizontale as in figuur 3. En  $y$  is het bedrag dat mét deze regeling moet worden afgedragen. Zie de verticale as in figuur 3. Beide bedragen zijn in guldens. Voor waarden van  $x$  tussen 2964 en 4150 is het verband tussen  $x$  en  $y$  te beschrijven met een formule van de vorm  $y = ax + b$ .

4p **11**  Stel die formule op.

De regeling voor kleine ondernemers bestond al langer. Echter, in de loop der jaren zijn sommige bedragen gewijzigd. Tot en met 1987 luidde de regeling als volgt:

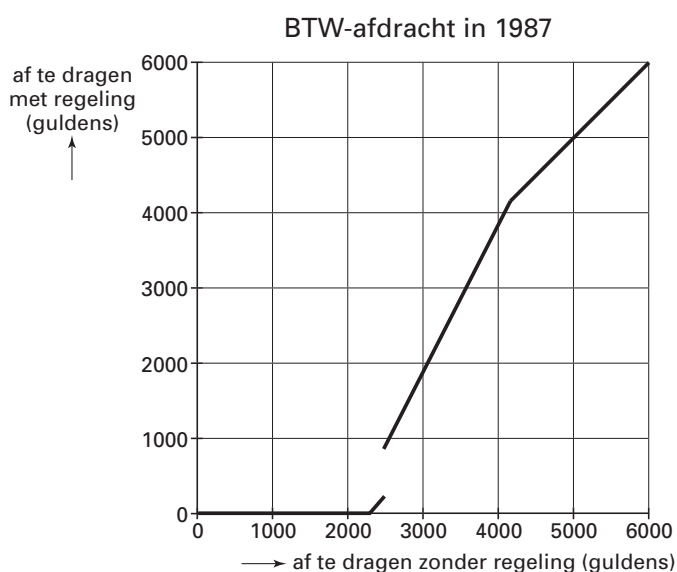
tekst

### Vermindering voor kleine ondernemers in guldens

Hoeveel BTW zou u per jaar moeten afdragen aan de Belastingdienst?	Hoeveel vermindering kunt u krijgen?
Meer dan f 4150	Geen vermindering
f 4150 of minder, maar meer dan f 2500	Vermindering van af te dragen BTW: f 4150 – (BTW-bedrag)
f 2500 of minder, maar meer dan f 2300	Vermindering van af te dragen BTW: f 2300
f 2300 of minder	De vermindering is gelijk aan het BTW-bedrag. U hoeft dus geen BTW af te dragen.

Ook bij deze regeling is een grafiek getekend. Zie figuur 4.

figuur 4



Men vond deze regeling onrechtvaardig voor ondernemers die zonder de regeling iets meer dan 2500 gulden zouden moeten afdragen.

- 3p **12**  Leg met behulp van figuur 4 uit waarom deze regeling voor hen onrechtvaardig gevonden werd.

Voor bedragen van 2300 tot 4150 gulden verschillen de regelingen uit 1987 en 2000 van elkaar.

- 4p **13**  Bereken het grootste verschil dat voorkomt. Licht je antwoord toe.

## Vierkeuzevragen

Bij vierkeuzevragen staan bij elke vraag vier mogelijke antwoorden:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$ . Slechts één daarvan is juist. Een kandidaat kan één van de vier antwoorden kiezen of de vraag onbeantwoord laten. Bij keuze van het juiste antwoord wordt 1 punt toegekend, in alle andere gevallen 0 punten. Als een kandidaat absoluut niet weet welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn, doet hij er daarom verstandig aan om toch een antwoord te kiezen. Dit leidt tot gokgedrag.

Een voorbeeld kan dit verduidelijken. Neem aan dat Tim en Tom, een tweeling, allebei niets snappen van scheikunde. Ze hebben voor een proefwerk dan ook allebei niets geleerd, omdat dat in hun ogen toch geen zin heeft. Bij het proefwerk, dat uit 20 vierkeuzevragen bestaat, vult Tim niets in. Hij heeft dan ook 0 punten. Tom heeft elke vraag gekocht.

- 3p **14** □ Bereken het aantal punten dat Tom kan verwachten.

Er is ook wel eens geopperd om bij een onjuist antwoord strafpunten te geven. Een kandidaat heeft dan twee keuzes: niets invullen levert 0 punten op; wel iets invullen levert 1 punt op bij een juist antwoord en  $-0,5$  punt ( $0,5$  strafpunt) bij een onjuist antwoord.

- 3p **15** □ Bereken de verwachtingswaarde van de score *per vraag* bij dit strafpuntensysteem als een kandidaat gokt.

### Subjectieve kansen

We kijken nu naar een andere manier van toetsen met vierkeuzevragen. Hierbij hoeft de kandidaat niet meer één antwoord te kiezen. In plaats daarvan vraagt men de kandidaat achter elk van de vier mogelijke antwoorden  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  de *subjectieve* kans op te schrijven.

Een kandidaat die bijvoorbeeld noteert  $p_A = 0,2$ ;  $p_B = 0,8$ ;  $p_C = 0$ ;  $p_D = 0$  geeft daarmee aan dat hij er vrij zeker van is dat  $B$  juist is, maar dat  $A$  ook nog zou kunnen, en dat  $C$  en  $D$  volgens hem zeker fout zijn.

De opgeschreven getallen  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p_C$  en  $p_D$  mogen natuurlijk niet negatief zijn en moeten bij elkaar opgeteld 1 zijn.

Bij iedere vraag wordt een *score* berekend die aangeeft ‘hoe dicht je bij het juiste antwoord zit’.

Als bijvoorbeeld  $C$  het juiste antwoord is, dan wordt de score berekend met de volgende formule:

$$\text{score} = 1 - (p_A^2 + p_B^2 + (1 - p_C)^2 + p_D^2)$$

Voor de gevallen waarbij  $A$ ,  $B$  of  $D$  het juiste antwoord is, gelden soortgelijke formules. De maximale score is 1 en de minimale score is  $-1$ .

Bij een bepaalde vraag is het juiste antwoord  $B$ . Een kandidaat die niet helemaal zeker van zijn zaak is, noteert bij deze vraag als subjectieve kansen:

$$p_A = 0,2; p_B = 0,7; p_C = 0; p_D = 0,1$$

- 4p **16** □ Bereken de score voor deze kandidaat bij deze vraag.

Stel dat bij een andere vraag  $C$  het juiste antwoord is. Een kandidaat haalt bij deze vraag de minimale score.

- 3p **17** □ Welke subjectieve kansen kan de kandidaat opgeschreven hebben achter de antwoorden  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$ ? Vermeld alle mogelijkheden.



Een kandidaat moet een vraag beantwoorden maar heeft geen idee welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn. Er zijn heel veel mogelijkheden voor de kandidaat om die vraag te beantwoorden:

- *Mogelijkheid I:*

De kandidaat zou kunnen gokken op een antwoord door daar 1 achter te schrijven (en dus 0 achter de andere antwoorden). Het antwoord waarbij de kandidaat 1 heeft gezet, kan goed zijn. Dan is de score 1. Als het niet goed is, is de score  $-1$ . De verwachte score is dan:

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot -1 = -0,50.$$

- *Mogelijkheid II:*

Hij kan ook op twee antwoorden gokken door achter ieder van die twee antwoorden  $\frac{1}{2}$  te schrijven.

- *Mogelijkheid III:*

Hij kan ook op drie antwoorden gokken door achter ieder van die drie antwoorden  $\frac{1}{3}$  te schrijven.

- *Mogelijkheid IV:*

En tenslotte kan hij ook op alle vier de antwoorden gokken door achter alle antwoorden  $\frac{1}{4}$  te schrijven. Deze laatste mogelijkheid levert hem een score van 0,25 op.

Er zijn nog veel meer mogelijkheden om de vraag te beantwoorden. We kijken echter alleen naar de bovengenoemde vier mogelijkheden.

De score bij mogelijkheid IV is hoger dan de verwachte score bij mogelijkheid I.

Mogelijkheid IV is daarmee een ‘verstandiger’ strategie dan mogelijkheid I.

7p **18** □ Onderzoek welk van de mogelijkheden II, III en IV de meest verstandige strategie is.

*Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.*

Verschillende financiële instellingen adverteren op grote schaal met aandelen-leaseplannen. Daarbij kun je aandelen kopen met geleend geld. Het voorbeeld hieronder is gebaseerd op zulke advertenties.

advertentie

## Met KoersSprint laat u het peloton achter u Doe mee voor slechts € 150 per maand

Het mooie van KoersSprint is dat u niet over een eigen kapitaal hoeft te beschikken. Zodra u besluit mee te doen, schieten wij u een bedrag van € 22 500 voor. Dit bedrag beleggen wij direct voor u in solide aandelen.

U betaalt slechts € 150 per maand als vergoeding (rente) voor het voorgeschoten bedrag.

U hebt direct het plezier van de mogelijke waardestijging van het totale pakket. Zo kan uw geld veel sneller groeien dan wanneer u maandelijks een klein bedrag zou beleggen. Na 5 jaar wordt de waarde van de belegging uitgekeerd, verminderd met het door ons voorgeschoten bedrag. De uitkering na 5 jaar is hoger naarmate de aandelen meer in waarde zijn gestegen. In de tabel hieronder ziet u enkele voorbeelden.

Jaarlijkse waardestijging van de aandelen	Uitkering na 5 jaar	Uw jaarrendement
13%	€ 18 955	30,3%
12%	€ 17 153	26,1%
11%	€ 15 414	21,7%
10%	€ 13 736	16,9%

In bovenstaande tabel gaat men ervan uit dat de waarde van de aandelen jaarlijks met een vast percentage stijgt. Er is dan dus sprake van exponentiële groei.

Bij aanschaf waren de aandelen € 22 500 waard. Als de waarde van de aandelen jaarlijks met 12% stijgt, dan krijgt volgens de tabel de klant na 5 jaar een uitkering van € 17 153.

3p **19**  Laat met een berekening zien hoe men aan deze € 17 153 komt.

De tabel vermeldt ook het jaarrendement. Zo is volgens de advertentie bij een uitkering na 5 jaar van € 17 153 het jaarrendement 26,1%. Daarmee wordt aangegeven wat een bank aan rente zou moeten geven om dezelfde opbrengst op te leveren. De klant betaalt nu namelijk iedere maand € 150 maar hij zou ook iedere maand € 150 bij een bank op een spaarrekening kunnen storten. Volgens de advertentie zou de bank op deze spaarrekening dan 26,1% rente per jaar moeten geven om te zorgen dat er na 5 jaar € 17 153 op de rekening staat. We willen controleren of dat klopt.

Omdat er aan het begin van iedere maand een bedrag op de rekening gestort wordt, moeten we ook het rentepercentage per maand weten. 26,1% rente per jaar komt niet overeen met

$$\frac{26,1}{12} = 2,175\% \text{ per maand maar met } 1,95\% \text{ per maand.}$$

3p **20**  Toon met een berekening aan dat een groeipercentage van 1,95% per maand een groeipercentage van 26,1% per jaar oplevert.

Stel dat de klant aan het begin van iedere maand € 150 op een spaarrekening stort en dat zijn spaarbedrag iedere maand met 1,95% groeit. Dan is zijn totale spaarbedrag na 5 jaar gegroeid tot:  $150 \cdot 1,0195^{60} + 150 \cdot 1,0195^{59} + \dots + 150 \cdot 1,0195^2 + 150 \cdot 1,0195$ .

Volgens de advertentie moet dit bedrag € 17 153 zijn. Het kan vanwege afrondingen enkele euro's verschillen.

4p **21**  Bereken het verschil met € 17 153 in gehele euro's nauwkeurig. Je kunt hierbij gebruik maken van de somformule voor meetkundige rijen.