

Voor dit examen zijn maximaal 86 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.

**Attentie!**

Voor de vragen 15 tot en met 21 moet je de computer gebruiken om de vragen te beantwoorden. Je hoeft daarbij geen of weinig computervaardigheden te laten zien.

Verondersteld wordt dat je, voor zover nodig, bekend bent met de software. Je geeft de antwoorden van deze vragen, net zoals bij de vragen 1 tot en met 14, op papier.

Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Voor de uitwerking van vraag 21 is een bijlage toegevoegd.

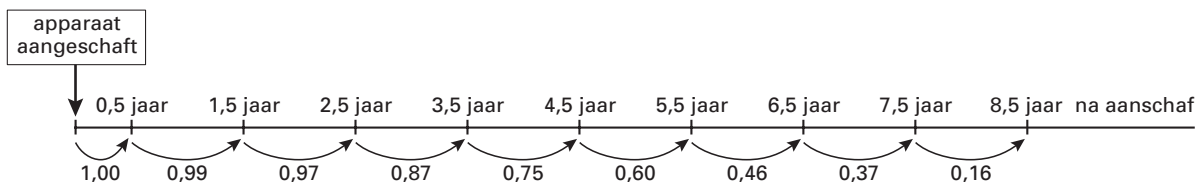
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## Levensduur van koffiezetapparaten

Enkele jaren geleden is onderzocht hoe lang nieuw aangeschafte koffiezetapparaten meegaan. Op basis daarvan is een kansmodel gemaakt zoals weergegeven in figuur 1. Hierin is bijvoorbeeld te zien dat alle apparaten een half jaar na aanschaf nog in gebruik zijn. Ook is te zien dat voor een apparaat van 1,5 jaar oud de kans 0,97 is dat het een jaar later nog steeds in gebruik is, en dus de kans 0,03 is dat het in dat jaar wordt afgedankt.

figuur 1



We passen dit model toe op een groep van 1500 nieuwe koffiezetapparaten. De *levensduur* van een apparaat is de tijdsduur tussen het aanschaffen en het afdanken van het apparaat. Uit de gegevens in figuur 1 volgt dat 187 van deze 1500 koffiezetapparaten een levensduur hebben tussen 2,5 en 3,5 jaar.

4p 1  Laat met een berekening zien dat dit klopt.

Het bovengenoemde aantal 187 vind je terug in tabel 1. De andere aantallen in deze tabel zijn op overeenkomstige wijze berekend.

tabel 1

### Levensduur van 1500 koffiezetapparaten

levensduur in jaren	aantal koffiezetapparaten
0,5-1,5	15
1,5-2,5	45
2,5-3,5	187
3,5-4,5	313
4,5-5,5	376
5,5-6,5	305
6,5-7,5	163
7,5-8,5	81
>8,5	15

7p 2  Verwerk de gegevens van tabel 1 op normaal waarschijnlijkheidspapier en toon daarmee aan dat de levensduur bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5,0 jaar en een standaardafwijking van 1,6 jaar.

*We nemen bij vraag 3 van deze opgave aan dat de levensduur van koffiezetapparaten normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5,0 jaar en een standaardafwijking van 1,6 jaar.*

Iemand heeft 9 jaar geleden zijn eerste koffiezetapparaat gekocht en nu, 9 jaar later, is net zijn derde koffiezetapparaat kapot gegaan. Hij gaat naar de winkel en moppert tegen de verkoper dat dit toch wel heel uitzonderlijk is.

De klant redeneert als volgt: “Drie koffiezetapparaten in negen jaar, dat is drie jaar per apparaat. Je zou verwachten dat zo’n apparaat wel langer dan drie jaar meegaat. De kans dat dit drie keer achter elkaar niet het geval is, is wel heel erg klein.”

5p 3  Bereken de kans dat drie willekeurig gekozen koffiezetapparaten elk een levensduur van ten hoogste drie jaar hebben.

We gaan nog even terug naar het onderzoek uit het begin van de opgave. Voor dit onderzoek heeft men *niet* een aantal koffiezetapparaten gedurende hun hele levensduur gevolgd. In plaats daarvan heeft men begin januari 1997 een enquête uitgevoerd onder 4000 huishoudens. Deze enquête heeft men precies een jaar later opnieuw uitgevoerd bij dezelfde 4000 huishoudens. Beide keren werd gevraagd of men een koffiezetapparaat gebruikte en zo ja, in welk kalenderjaar het was aangeschaft.

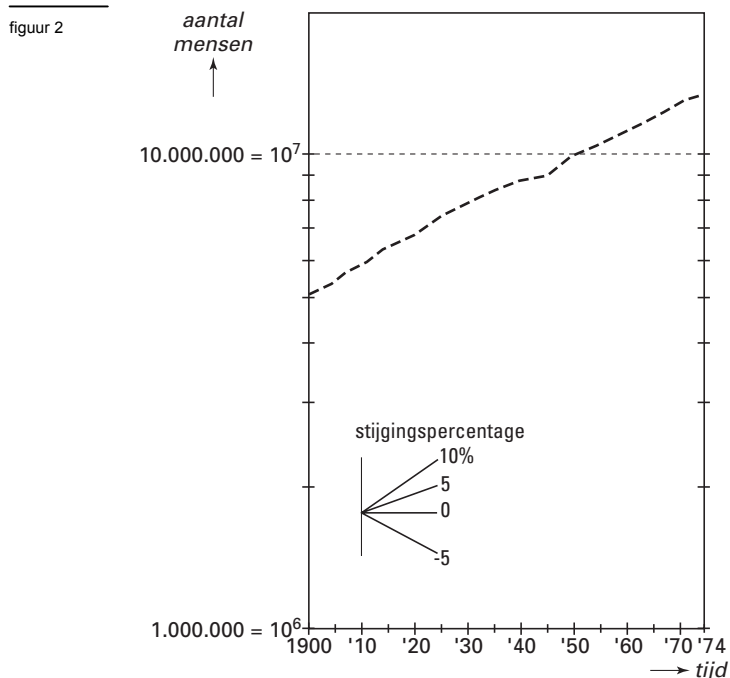
Op basis van de zo verkregen gegevens hebben de onderzoekers het model van figuur 1 opgesteld. Daarbij gingen ze ervan uit dat koffiezetapparaten uit verschillende jaren gelijkwaardig zijn wat de levensduur betreft. Bovendien gingen ze ervan uit dat de koffiezetapparaten uit elk kalenderjaar gelijkmatig gespreid over dat jaar zijn aangeschaft, en dus aan het eind van het jaar van aanschaf gemiddeld een half jaar oud zijn.

Begin januari 1997 gebruikten 506 van de onderzochte huishoudens een koffiezetapparaat dat in 1993 was aangeschaft. Begin januari 1998, een jaar later dus, bleek dat 125 van deze apparaten inmiddels waren afgedankt.

- 3p 4  Welke van de kansen uit figuur 1 kan uit deze gegevens worden afgeleid? Licht je antwoord toe met een berekening van de betreffende kans.

## De Nederlandse bevolking

In figuur 2 is de groei van de Nederlandse bevolking tussen 1900 en 1974 weergegeven. Langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Zo kun je aflezen dat Nederland in 1900 ruim 5 miljoen inwoners telde. Ook zie je in de figuur een 'inzetje' waarin informatie staat over het stijgingspercentage van grafieken bij een logaritmische schaalverdeling.



De bevolking groeide in de beschreven periode bij benadering exponentieel.

Tussen 1 januari 1900 en 1 januari 1974 is de Nederlandse bevolking van 5 miljoen naar 13,4 miljoen mensen gegroeid. Hieruit kunnen we de volgende formule afleiden:

$$N = 5 \cdot 1,142^t$$

In deze formule is  $N$  het aantal inwoners van Nederland in miljoenen en  $t$  de tijd in tientallen jaren met  $t = 0$  op 1 januari 1900.

- 4p **5** □ Toon aan dat deze formule klopt door de formule af te leiden uit de aantallen van 1900 en 1974.

De grafiek van  $N$  vertoont een knikje bij het jaar 1945. Volgens een demograaf die deze grafiek in een artikel gebruikt, betekent deze knik dat er in 1945 ruim 80 000 inwoners minder waren dan er volgens bovenstaande formule voor  $N$  zouden zijn.

- 3p **6** □ Leg uit hoe de demograaf dit getal gevonden kan hebben. Maak daarbij gebruik van de grafiek in figuur 2 en de formule voor  $N$ .

Neem voor de volgende vraag eens aan dat het aantal inwoners van Nederland zich ook na 1974 zou hebben ontwikkeld volgens de formule voor  $N$ .

- 4p **7** □ Bereken in welk jaar het aantal van 18 miljoen mensen dan zou worden bereikt.

Met behulp van het inzetje in figuur 2 kun je groeipercentages aflezen.

Voor de Nederlandse bevolking kun je aflezen dat het groeipercentage tussen 5% en 10% lag. Aan het inzetje is echter niet te zien wat men precies bedoelt. Het zou hier kunnen gaan om

- A) een groeipercentage per jaar;
- B) een groeipercentage per 5 jaar;
- C) een groeipercentage per 10 jaar of
- D) een groeipercentage per 15 jaar.

- 4p **8**  Geef met behulp van een berekening aan welke mogelijkheid van de hierboven genoemde mogelijkheden A, B, C of D bedoeld wordt.

## Reislust

Reislust is een reisorganisatie die klassieke reizen organiseert. Bij een grote deelname geeft Reislust doorgaans aantrekkelijke kortingen.

foto

### Een klassiek reisdoel



In 2002 organiseerde Reislust een reis naar Griekenland. Reislust deed geïnteresseerden een aanbod waarbij men uitging van een basisprijs van 2000 euro per persoon. Deze basisprijs werd verlaagd met 10 euro per deelnemer. Als er bijvoorbeeld 12 personen mee zouden gaan, dan zou men per persoon  $2000 - 12 \times 10 = 1880$  euro betalen.

Na enige tijd bleek dat zich 25 personen hadden opgegeven. Op het laatste moment meldde zich echter nog één persoon meer aan.

- 3p **9**  Bereken hoeveel Reislust door deze extra aanmelding *in totaal* meer ontving dan bij een deelname van 25 personen.

Het aantal personen dat meedoet aan de reis noemen we  $n$ .

- 3p **10**  Stel een formule op waarbij je de totale opbrengst van Reislust uitdrukt in  $n$ .

## Strike it rich

Bij het Engelse televisiespelletje *Strike it rich* speelt een deelnemer in de finale tien rondes. Bij elke ronde krijgt de deelnemer drie beeldschermen voor zich, waar nog niets op te zien is. De deelnemer moet willekeurig één van deze beeldschermen kiezen. Nadat hij een scherm heeft aangewezen, worden alle schermen zichtbaar. Op één van de drie beeldschermen komt *Ga door* te staan, op een ander beeldscherm *Hot Spot*, en op het derde beeldscherm *Vraag*. Voor alle duidelijkheid: deze woorden worden op aselecte wijze op de beeldschermen geplaatst voordat de deelnemer kiest maar worden pas na zijn keuze zichtbaar voor hem.

Het is mogelijk dat een deelnemer in de tien rondes precies één keer een beeldscherm met *Vraag* erop aanwijst.

- 3p **11**  Bereken de kans dat dit het geval is. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

De deelnemer kan bij elke ronde een strafpunt krijgen. Daarvoor gelden de volgende regels. Wanneer op het aangewezen scherm *Ga door* verschijnt, gaat de deelnemer zonder strafpunt door naar de volgende ronde.

Wanneer op het aangewezen scherm *Hot Spot* verschijnt, krijgt de deelnemer een strafpunt en gaat door naar de volgende ronde.

Wanneer op het aangewezen scherm *Vraag* verschijnt, krijgt de deelnemer een vraag gesteld die hij met *ja* of met *nee* moet beantwoorden. Wanneer het antwoord fout is, krijgt hij een strafpunt en gaat door naar de volgende ronde. Wanneer het antwoord goed is, gaat hij zonder strafpunt door naar de volgende ronde.

Uit het bovenstaande volgt dat voor een deelnemer die alle vragen foutloos beantwoordt bij iedere ronde de kans op een strafpunt gelijk is aan  $\frac{1}{3}$ .

Maar voor een deelnemer die de vragen puur op de gok beantwoordt, dus met 50% kans op het juiste antwoord, is bij iedere ronde de kans op een strafpunt gelijk aan  $\frac{1}{2}$ .

- 3p **12**  Toon de juistheid van deze laatste kans met een berekening aan.

- 3p **13**  Bereken voor deze gokkende deelnemer ook de kans dat hij in de tien rondes hoogstens twee strafpunten krijgt. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Vóór het begin van het spel moet de deelnemer kiezen of hij voor maximaal 2, maximaal 3 of maximaal 4 strafpunten speelt. Alle strafpunten die de deelnemer gedurende de tien rondes oploopt, worden opgeteld. Als hij na tien rondes niet meer dan het gekozen aantal strafpunten heeft, krijgt hij een prijs, zoals vermeld in de volgende tabel 2. (£ betekent Britse pond.)

tabel 2

maximum aantal strafpunten waarvoor deelnemer speelt	prijs als het totaal aantal strafpunten niet boven het gekozen maximum aantal strafpunten uitkomt
2	£ 10 000
3	£ 7000
4	£ 5000

Als een deelnemer bijvoorbeeld voor maximaal 3 strafpunten heeft gekozen en hij heeft na de tien rondes 3 of minder strafpunten, dan krijgt hij de geldprijs van £ 7000. Heeft hij 4 of meer strafpunten, dan krijgt hij in dat geval niets.

Voor een deelnemer die alle vragen puur op de gok beantwoordt, is de verwachtingswaarde van de geldprijs zo hoog mogelijk wanneer hij voor maximaal 4 strafpunten speelt.

We vragen ons nu af hoe dat zit met een deelnemer die alle vragen foutloos beantwoordt.

- 6p **14**  Onderzoek voor welk maximum aantal strafpunten deze deelnemer moet spelen om te zorgen dat de verwachtingswaarde van de geldprijs zo hoog mogelijk is.

***Dit was de laatste vraag van het schriftelijk gedeelte. Ga verder met de vragen van het computergedeelte.***

Het ontwikkelingsprogramma van de Verenigde Naties, UNDP, berekent jaarlijks voor vrijwel alle landen de *HDI* (Human Development Index). De bedoeling daarvan is om met één getal aan te geven hoe het met het welzijn van de inwoners van een land gesteld is in vergelijking met andere landen. Natuurlijk kan dit slechts een ruwe maat zijn. Er zijn veel meer gegevens nodig om een goed beeld van de situatie in een land te krijgen. Maar door één getal te gebruiken zijn alle landen in een ranglijst te plaatsen waarmee bijvoorbeeld eenvoudig de minst ontwikkelde landen zijn aan te wijzen.

Om de *HDI* te berekenen bepaalt men eerst afzonderlijk de levensverwachtingsindex, de inkomensindex en de scholingsindex. De *HDI* is het gemiddelde van deze drie indices, dus:

$$HDI = \frac{\text{levensverwachtingsindex} + \text{inkomensindex} + \text{scholingsindex}}{3}$$

### De tabel



Open het bestand 'HDI-TABEL.XLS'.

Op je computerscherm zie je een tabel met per land de gegevens waaruit men de *HDI* berekent. De gegevens in deze tabel betreffen de situatie in 1997.

In kolom C staat de *levensverwachting* in jaren voor een pasgeborene. Daarmee is de *levensverwachtingsindex* in kolom E berekend.

In kolom D staat het gemiddelde *inkomen* per inwoner (in dollars). Daarmee is de *inkomensindex* in kolom F berekend.

Hoewel niet vermeld is hoe de levensverwachtingsindex en de inkomensindex berekend zijn, is er op basis van de tabel al wel iets over te zeggen.

- 4p **15**  Toon aan door gebruik te maken van gegevens uit de tabel dat het verband tussen de levensverwachting (kolom C) en de levensverwachtingsindex (kolom E) lineair kan zijn. Schrijf de gegevens op die je uit de kolommen C en E gebruikt.
- 4p **16**  Toon ook aan door gebruik te maken van gegevens uit de tabel dat het verband tussen het inkomen (kolom D) en de inkomensindex (kolom F) niet lineair kan zijn. Schrijf de gegevens op die je uit de kolommen D en F gebruikt.

In kolom G zie je de scholingsindex. De berekening daarvan blijft hier buiten beschouwing. De *HDI* staat in kolom H. De verdere kolommen komen later in deze opgave aan de orde. De landen zijn gerangschikt volgens de *HDI*.

### Gewichten

Bij de berekening van de *HDI* tellen de levensverwachtingsindex, de inkomensindex en de scholingsindex alle drie even zwaar mee. Dit kun je nadrukkelijk zichtbaar maken door in de eerder vermelde formule voor de *HDI* gewichtsfactoren 1 te schrijven:

$$HDI = \frac{1 \cdot \text{levensverwachtingsindex} + 1 \cdot \text{inkomensindex} + 1 \cdot \text{scholingsindex}}{3}$$

Men kan ervoor kiezen de drie indices niet alle drie even zwaar te laten meetellen door andere (bijvoorbeeld drie verschillende) gewichtsfactoren te kiezen. Het gevolg hiervan kan zijn dat er een andere volgorde op de *HDI*-ranglijst ontstaat.

In het bestand HDI-TABEL.XLS kun je het effect onderzoeken van het kiezen van verschillende gewichtsfactoren door in de cellen N2, O2 en P2 getallen  $u$ ,  $v$  en  $w$  in te vullen. *Let op: niet negatief en niet alle drie gelijk aan 0.*

Er worden dan nieuwe *HDI*-waarden berekend volgens de formule

$$HDI = \frac{u \cdot \text{levensverwachtingsindex} + v \cdot \text{inkomensindex} + w \cdot \text{scholingsindex}}{u + v + w}$$

De zo berekende *HDI*-waarden staan in kolom I.

Bij het openen van het bestand is  $u = 1$ ,  $v = 1$ ,  $w = 1$ , zodat in kolom I dezelfde waarden staan als in kolom H.

Om de invloed van andere gewichten op de *HDI*-ranglijst na te gaan, ga je als volgt te werk:

- vul  $u$ ,  $v$  en  $w$  in;
- druk op de ENTER-toets;
- klik op de rechthoekige knop 'HDI-sorteren'.

Daardoor wordt de hele tabel gesorteerd naar kolom I. Na het sorteren zie je in kolom L hoeveel plaatsen elk land is opgeschoven vergeleken met de oorspronkelijke ranglijst. Bij een positief getal is het land naar boven opgeschoven, bij een negatief getal naar beneden.

#### Voorbeeld

Door  $u = 2$ ,  $v = 1$ ,  $w = 1$  in te vullen geef je de levensverwachtingsindex een groter gewicht in de *HDI*.

Na sorteren zie je bijvoorbeeld dat Japan naar de tweede plaats is gestegen. Het oorspronkelijke rangnummer zie je in kolom A, het nieuwe rangnummer in kolom J, en het verschil daartussen in kolom L.

Je kunt door geschikte waarden voor  $u$ ,  $v$  en  $w$  te kiezen *HDI*-waarden verkrijgen zo, dat Luxemburg (oorspronkelijk rangnummer 17) op de ranglijst stijgt.

5p **17** □ Geef zulke waarden van  $u$ ,  $v$  en  $w$ .

Leg uit hoe je te werk bent gegaan om deze waarden te vinden.

Een organisatie wil de tien landen met de laagste *HDI* extra hulp gaan geven. Iemand beweert dat de *HDI* nodeloos ingewikkeld is en dat ze net zo goed de tien landen met de laagste inkomensindex zouden kunnen nemen.

6p **18** □ Schrijf op welke landen bij gebruik van de *HDI* wel extra hulp zouden ontvangen en bij het gebruik van de inkomensindex niet. Gebruik voor het verkrijgen van je antwoord geschikte waarden van  $u$ ,  $v$  en  $w$ . Licht je antwoord toe.

In de oorspronkelijke rangorde staat Canada op nummer 1.

4p **19** □ Onderzoek voor elk van de landen die in de oorspronkelijke rangorde op nummer 2 tot en met 9 staan, of het door een geschikte keuze van  $u$ ,  $v$  en  $w$  Canada kan passeren. Licht je werkwijze duidelijk toe.

Door een geschikte keuze van  $u$ ,  $v$  en  $w$  is het mogelijk dat Nederland bij de eerste vijf komt.

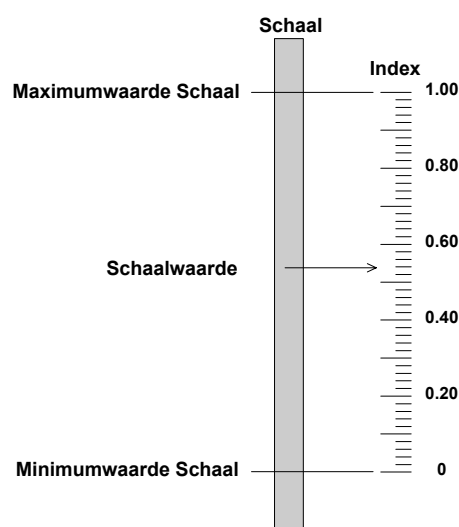
4p **20** □ Geef waarden van  $u$ ,  $v$  en  $w$  waarbij dit gebeurt.

Leg uit hoe je te werk bent gegaan om deze waarden te vinden.

### De berekening van de indices

We bekijken nu hoe kenmerken (met name levensverwachting en inkomen) omgezet worden naar de bijbehorende indices. Steeds wordt voor zo'n kenmerk een minimumwaarde en een maximumwaarde vastgesteld en geeft de index aan waar de werkelijke waarde zich bevindt op de schaal tussen dit minimum en maximum. Daarbij loopt de index tussen deze twee waarden op van 0 tot 1. Zie figuur 3.

figuur 3





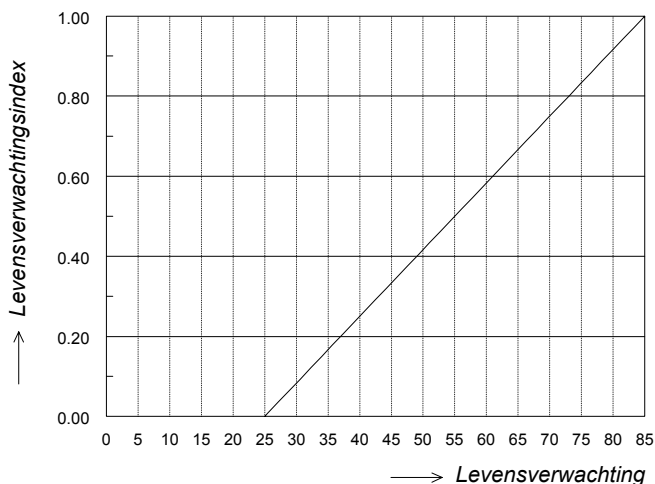
Voor de levensverwachting heeft men de minimumwaarde 25 jaar en de maximumwaarde 85 jaar gekozen, en de volgende formule voor de levensverwachtingsindex opgesteld:

$$\text{levensverwachtingsindex} = \frac{X - 25}{85 - 25}$$

Hierbij is  $X$  de levensverwachting van het betreffende land.

De bijbehorende grafiek staat in figuur 4. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 4



De minimumwaarde voor de levensverwachting is tamelijk willekeurig gekozen. In feite had men elke waarde van 0 tot en met 35 kunnen kiezen. Geven we met  $m$  de gekozen minimumwaarde aan, dan wordt de formule:

$$\text{levensverwachtingsindex} = \frac{X - m}{85 - m}$$

In figuur 4 is  $m = 25$  gekozen. Wanneer we voor  $m$  een andere waarde dan 25 hadden gekozen, zouden natuurlijk de waarden van de levensverwachtingsindex in de tabel anders zijn geweest. Maar belangrijker is dat daardoor ook het verschil tussen de waarden van de levensverwachtingsindex van twee landen groter of kleiner kan worden. Daardoor zou een andere *HDI*-rangorde kunnen ontstaan zonder dat, zoals eerder, de gewichtsfactoren  $u$ ,  $v$  en  $w$  worden veranderd.

Stel dat het verschil van de levensverwachtingsindex van twee landen in de tabel gelijk is aan 0,3. Bij een andere keuze van  $m$  (met  $m \leq 35$ ) zou dit verschil kleiner kunnen zijn.

4p 21  Hoe zou men  $m$  moeten veranderen om dit verschil in levensverwachtingsindex kleiner te maken? Licht je antwoord toe. Je kunt daarbij gebruik maken van de figuur op de bijlage.



Sluit Excel af. Het bestand 'HDI-TABEL.XLS' niet opslaan.

**Einde**