Wiskunde A1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO-Compex

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **03**

Tijdvak 1
Dinsdag 27 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 87 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.

Attentie!
Voor de vragen 15 tot en met 21 moet je de computer gebruiken om de vragen te beantwoorden. Je hoeft daarbij geen of weinig computervaardigheden te laten zien. Verondersteld wordt dat je, voor zover nodig, bekend bent met de software. Je geeft de antwoorden van deze vragen, net zoals bij de vragen 1 tot en met 14, op papier.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 5, 7, 8 en 21 is een bijlage toegevoegd.

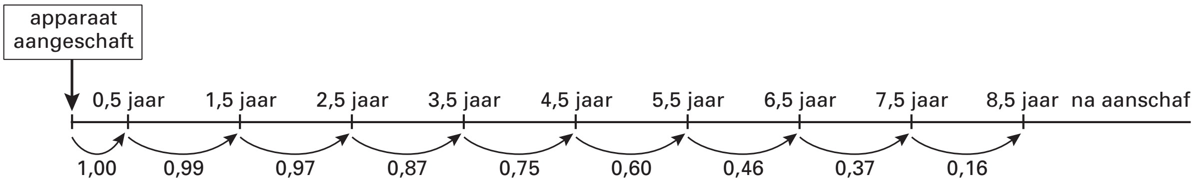
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Levensduur van koffiezetapparaten

Enkele jaren geleden is onderzocht hoe lang nieuw aangeschafte koffiezetapparaten meegaan. Op basis daarvan is een kansmodel gemaakt zoals weergegeven in figuur 1. Hierin is bijvoorbeeld te zien dat alle apparaten een half jaar na aanschaf nog in gebruik zijn. Ook is te zien dat voor een apparaat van 1,5 jaar oud de kans 0,97 is dat het een jaar later nog steeds in gebruik is, en dus de kans 0,03 is dat het in dat jaar wordt afgedankt.

figuur 1



We passen dit model toe op een groep van 1500 nieuwe koffiezetapparaten. De *levensduur* van een apparaat is de tijdsduur tussen het aanschaffen en het afdanken van het apparaat. Uit de gegevens in figuur 1 volgt dat 187 van deze 1500 koffiezetapparaten een levensduur hebben tussen 2,5 en 3,5 jaar.

4p **1** ☐ Laat met een berekening zien dat dit klopt.

Het bovengenoemde aantal 187 vind je terug in tabel 1. De andere aantallen in deze tabel zijn op overeenkomstige wijze berekend.

tabel 1 **Levensduur van 1500 koffiezetapparaten**

levensduur in jaren	aantal koffiezetapparaten
0,5-1,5	15
1,5-2,5	45
2,5-3,5	187
3,5-4,5	313
4,5-5,5	376
5,5-6,5	305
6,5-7,5	163
7,5-8,5	81
>8,5	15

7p **2** ☐ Verwerk de gegevens van tabel 1 op normaal waarschijnlijkheidspapier en toon daarmee aan dat de levensduur bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5,0 jaar en een standaardafwijking van 1,6 jaar.

We nemen bij vraag 3 van deze opgave aan dat de levensduur van koffiezetapparaten normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5,0 jaar en een standaardafwijking van 1,6 jaar.

Iemand heeft 9 jaar geleden zijn eerste koffiezetapparaat gekocht en nu, 9 jaar later, is net zijn derde koffiezetapparaat kapot gegaan. Hij gaat naar de winkel en moppert tegen de verkoper dat dit toch wel heel uitzonderlijk is.
De klant redeneert als volgt: “Drie koffiezetapparaten in negen jaar, dat is drie jaar per apparaat. Je zou verwachten dat zo’n apparaat wel langer dan drie jaar meegaat. De kans dat dit drie keer achter elkaar niet het geval is, is wel heel erg klein.”

5p **3** ☐ Bereken de kans dat drie willekeurig gekozen koffiezetapparaten elk een levensduur van ten hoogste drie jaar hebben.

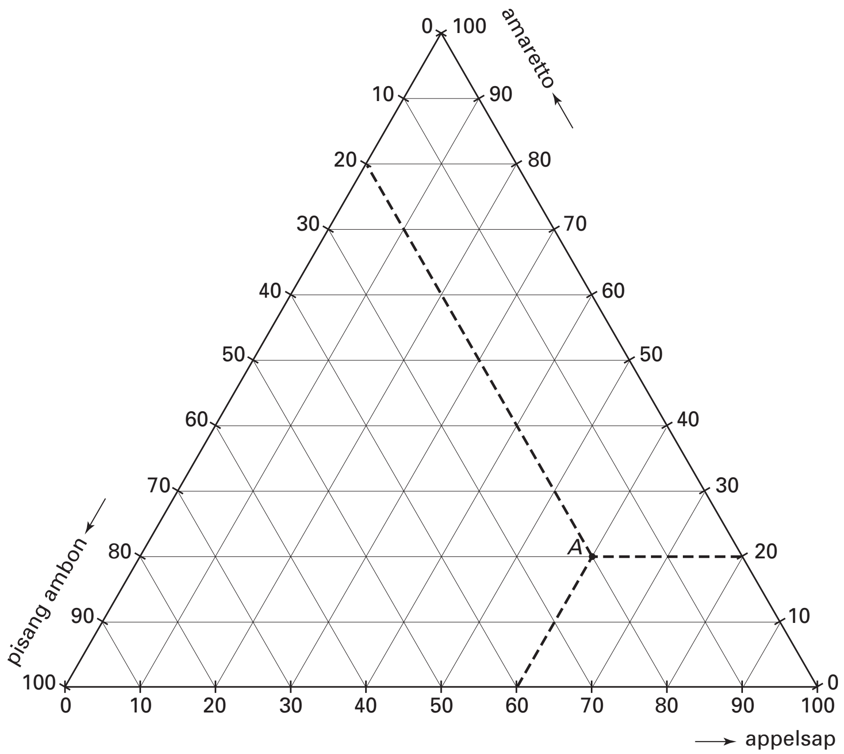
In de winkel worden ook espresso-apparaten van het merk Pressa verkocht. De fabrikant beweert dat de helft van de Pressa-apparaten 8 jaar na aanschaf nog steeds in gebruik is. Maar de verkoper krijgt nogal wat klachten over deze apparaten en is dan ook van mening dat ze minder lang mee gaan.
Op internet vindt hij de resultaten van een onderzoek naar de levensduur van Pressa-apparaten. Daaruit blijkt dat van de 50 onderzochte Pressa-apparaten er 31 een levensduur van minder dan 8 jaar hadden.

6p **4** ☐ Onderzoek of dit resultaat voldoende aanleiding is om de bewering van de fabrikant te verwerpen. Neem een significantieniveau van 5%.

Cocktails

Een cocktail is een drank die wordt gemaakt door enkele basisdranken te mengen. Zo bestaat de cocktail ‘Apple Dream’ voor 60% uit appelsap, voor 20% uit amaretto en voor 20% uit pisang ambon.
Met deze drie basisdranken kunnen we veel meer cocktails maken door andere mengverhoudingen te gebruiken. Om al deze mengverhoudingen in kaart te brengen gebruikt men vaak een zogenaamd *drie-componentendiagram*. In figuur 2 zie je een afbeelding van zo’n drie-componentendiagram, met daarin het punt A. Dit punt hoort bij de cocktail ‘Apple Dream’. Op de bijlage bij deze opgave staat het diagram ook afgebeeld.

figuur 2



De cocktail ‘Strong Apple’ bestaat voor 20% uit appelsap, voor 30% uit amaretto en voor 50% uit pisang ambon.

3p **5** ☐ Teken op de bijlage in figuur 2 het punt dat hoort bij ‘Strong Apple’. Teken duidelijk de hulplijnen die je hebt gebruikt.

Een drankenfabrikant wil uit de drie genoemde basisdranken een cocktail maken. Om na te gaan welke winst hij kan behalen gebruikt hij de volgende gegevens.

basisdrank	**kosten per liter in euro’s**
appelsap	0,25
amaretto	4
pisang ambon	3

De fabrikant wil de cocktail gaan verkopen voor 7,50 euro per liter.

We geven het percentage appelsap waaruit de cocktail bestaat aan met x, het percentage amaretto met y en het percentage pisang ambon met z.
De winst in euro’s die de drankenfabrikant maakt op 1 liter cocktail noemen we W. Voor W geldt de volgende formule: $W = 4{,}5 + 0{,}0275x - 0{,}01y$.

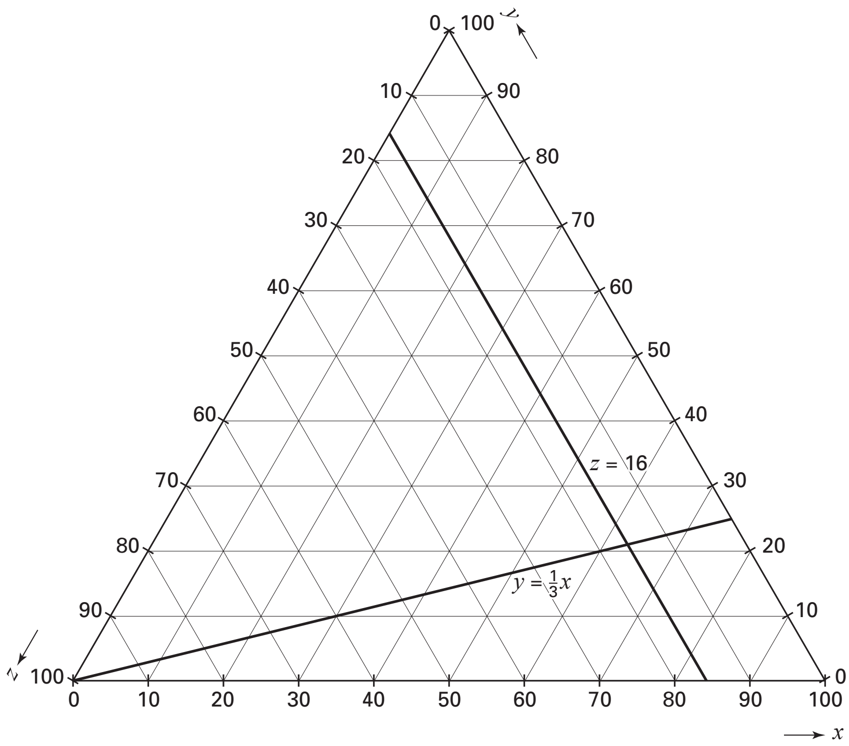
4p **6** ☐ Laat zien hoe deze formule voor W uit de gegevens kan worden afgeleid. Bedenk daarbij dat $x + y + z = 100$.

De drankenfabrikant stelt wel enkele voorwaarden aan de cocktail die hij wil maken:
- de cocktail moet voor minstens 16% uit pisang ambon bestaan;
- het percentage amaretto moet minstens even groot zijn als het percentage pisang ambon;
- het percentage appelsap mag hoogstens driemaal zo groot zijn als het percentage amaretto.

We kunnen deze drie voorwaarden als volgt vertalen: $z \geq 16$, $y \geq z$ en $y \geq \frac{1}{3}x$.

In figuur 3 hieronder zijn de twee grenslijnen $z = 16$ en $y = \frac{1}{3}x$ getekend. Figuur 3 staat ook op de bijlage.

figuur 3



4p **7** ☐ Teken op de bijlage in figuur 3 de ontbrekende grenslijn en geef het toegestane gebied aan.

De fabrikant wil weten bij welke mengverhouding van de basisdranken in de cocktail de winst per liter maximaal is en hoe groot deze winst is.

5p **8** ☐ Bereken deze mengverhouding en de winst per liter die de fabrikant bij deze mengverhouding behaalt.

Grondstofverbruik

Ongeveer dertig jaar geleden verscheen het ‘Rapport van de Club van Rome’. Daarin wordt aandacht besteed aan het wereldwijd verbruik van veel grondstoffen. De schrijvers vreesden dat verschillende grondstoffen snel op zouden raken. Bij hun berekeningen hebben zij het begin van het jaar 1970 als uitgangspunt genomen.
Het rapport vermeldt dat begin 1970 de voorraad koper 313 miljoen ton was en dat in 1970 het jaarverbruik van koper 8,7 miljoen ton bedroeg.

De *levensduur* van de voorraad van een grondstof is het aantal jaren vanaf begin 1970 totdat de voorraad van deze grondstof is uitgeput. Daarbij gaan we ervan uit dat er in de tussentijd geen nieuwe voorraden worden ontdekt. Zo is volgens het rapport de levensduur van de voorraad chroom 420 jaar, wanneer je aanneemt dat het jaarlijks verbruik van chroom steeds even groot is als in 1970, namelijk 1,9 miljoen ton.

Als we aannemen dat in de jaren na 1970 ook het jaarlijks verbruik van koper steeds even groot is als dat in 1970, dan is de levensduur van de voorraad chroom veel groter dan die van de voorraad koper.

3p **9** ☐ Hoeveel keer zo groot is dan de levensduur van de voorraad chroom, vergeleken met die van de voorraad koper? Licht je antwoord toe met een berekening.

In werkelijkheid was er ook destijds al sprake van een toenemende vraag naar grondstoffen. In het rapport heeft men hier aandacht aan besteed. Zo veronderstelde men dat vanaf 1970 het verbruik van koper jaarlijks zou groeien met 5,8% en het verbruik van chroom jaarlijks met 3,3%.

5p **10** ☐ Bereken in dat geval vanaf welk jaar het jaarverbruik van koper minstens 6 keer zo groot is als dat van chroom.

Strike it rich

Bij het Engelse televisiespelletje *Strike it rich* speelt een deelnemer in de finale tien rondes. Bij elke ronde krijgt de deelnemer drie beeldschermen voor zich, waar nog niets op te zien is. De deelnemer moet willekeurig één van deze beeldschermen kiezen. Nadat hij een scherm heeft aangewezen, worden alle schermen zichtbaar. Op één van de drie beeldschermen komt *Ga door* te staan, op een ander beeldscherm *Hot Spot*, en op het derde beeldscherm *Vraag*. Voor alle duidelijkheid: deze woorden worden op aselecte wijze op de beeldschermen geplaatst voordat de deelnemer kiest maar worden pas na zijn keuze zichtbaar voor hem.

Het is mogelijk dat een deelnemer in de tien rondes precies één keer een beeldscherm met *Vraag* erop aanwijst.

3p **11** ☐ Bereken de kans dat dit het geval is. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

De deelnemer kan bij elke ronde een strafpunt krijgen. Daarvoor gelden de volgende regels.
Wanneer op het aangewezen scherm *Ga door* verschijnt, gaat de deelnemer zonder strafpunt door naar de volgende ronde.
Wanneer op het aangewezen scherm *Hot Spot* verschijnt, krijgt de deelnemer een strafpunt en gaat door naar de volgende ronde.
Wanneer op het aangewezen scherm *Vraag* verschijnt, krijgt de deelnemer een vraag gesteld die hij met *ja* of met *nee* moet beantwoorden. Wanneer het antwoord fout is, krijgt hij een strafpunt en gaat door naar de volgende ronde. Wanneer het antwoord goed is, gaat hij zonder strafpunt door naar de volgende ronde.

Uit het bovenstaande volgt dat voor een deelnemer die alle vragen foutloos beantwoordt bij iedere ronde de kans op een strafpunt gelijk is aan $\frac{1}{3}$.
Maar voor een deelnemer die de vragen puur op de gok beantwoordt, dus met 50% kans op het juiste antwoord, is bij iedere ronde de kans op een strafpunt gelijk aan $\frac{1}{2}$.

3p **12** ☐ Toon de juistheid van deze laatste kans met een berekening aan.

3p **13** ☐ Bereken voor deze gokkende deelnemer ook de kans dat hij in de tien rondes hoogstens twee strafpunten krijgt. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Vóór het begin van het spel moet de deelnemer kiezen of hij voor maximaal 2, maximaal 3 of maximaal 4 strafpunten speelt. Alle strafpunten die de deelnemer gedurende de tien rondes oploopt, worden opgeteld. Als hij na tien rondes niet meer dan het gekozen aantal strafpunten heeft, krijgt hij een prijs, zoals vermeld in de volgende tabel 2. (£ betekent Britse pond.)

tabel 2

maximum aantal strafpunten waarvoor deelnemer speelt	prijs als het totaal aantal strafpunten niet boven het gekozen maximum aantal strafpunten uitkomt
2	£ 10 000
3	£ 7000
4	£ 5000

Als een deelnemer bijvoorbeeld voor maximaal 3 strafpunten heeft gekozen en hij heeft na de tien rondes 3 of minder strafpunten, dan krijgt hij de geldprijs van £ 7000. Heeft hij 4 of meer strafpunten, dan krijgt hij in dat geval niets.

Voor een deelnemer die alle vragen puur op de gok beantwoordt, is de verwachtingswaarde van de geldprijs zo hoog mogelijk wanneer hij voor maximaal 4 strafpunten speelt.
We vragen ons nu af hoe dat zit met een deelnemer die alle vragen foutloos beantwoordt.

6p **14** ☐ Onderzoek voor welk maximum aantal strafpunten deze deelnemer moet spelen om te zorgen dat de verwachtingswaarde van de geldprijs zo hoog mogelijk is.

Dit was de laatste vraag van het schriftelijk gedeelte. Ga verder met de vragen van het computergedeelte.

Epidemie

Men spreekt van een epidemie als in korte tijd minstens 2% van de bevolking een besmettelijke ziekte oploopt. Een voorbeeld van zo'n ziekte is griep.
Rond 1930 hebben twee Schotse wiskundigen, Reed en Frost, epidemieën bestudeerd. Zij hebben de wetmatigheden die zij daarbij meenden te zien in een wiskundig model vastgelegd. Met dit model kan men voorspellingen doen over de aantallen zieken na het uitbreken van een epidemie. Deze opgave gaat over verschillende varianten van dit zogeheten *Reed-Frost-model*.

In de modellen die we hier bekijken, kunnen mensen *vatbaar*, *ziek* of *immuun* zijn.
Wie vatbaar is, kan ziek worden. Dat gebeurt uitsluitend wanneer je in contact komt met een zieke en daarbij besmet raakt.
Wie ziek is, geneest na verloop van tijd. Bij sommige ziekten kan hij of zij dan opnieuw vatbaar worden, bij andere ziekten wordt hij of zij dan immuun.
Wie immuun is of wordt, blijft immuun en kan voorlopig niet meer ziek worden.

In deze opgave gaat het steeds over een populatie van 10 000 mensen. We beschrijven de ontwikkeling van de aantallen mensen die vatbaar, ziek of immuun zijn met stappen van een week. In week n zijn er V_n mensen vatbaar, Z_n mensen ziek en I_n mensen immuun. Voor elke week geldt: $V_n + Z_n + I_n = 10\,000$.
We beginnen met week 0. We nemen in deze opgave steeds aan dat er 10 mensen ziek zijn in week 0. Als nog niemand immuun is, geldt dus $Z_0 = 10$; $I_0 = 0$; $V_0 = 9\,990$.

Model 1

We bekijken in het eerste model een ziekte waarbij iedere zieke na één week genezen is en dan immuun wordt.
We krijgen dan de volgende recurrente betrekkingen:

- $Z_{n+1} = (1 - k^{Z_n}) \cdot V_n$
- $I_{n+1} = I_n + Z_n$
- $V_{n+1} = 10\,000 - Z_{n+1} - I_{n+1}$

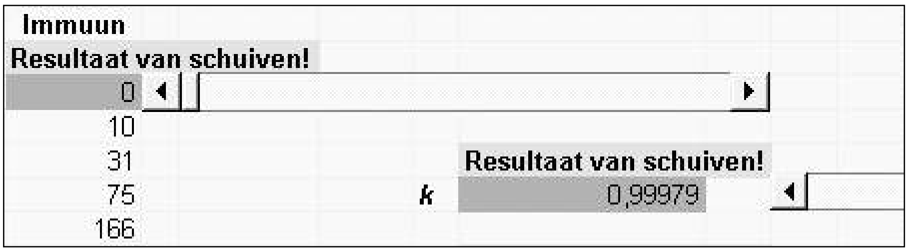
Hierbij is k een getal tussen 0 en 1, dat aangeeft in welke mate er binnen de populatie van 10 000 mensen besmetting plaatsvindt: bij $k = 1$ is er geen besmetting en bij $k = 0$ zal iedere vatbare ziek worden.
Om het model bij de werkelijkheid te laten aansluiten beperken we ons tot waarden van k die dicht bij 1 liggen.

Uit één van de drie recurrente betrekkingen van het model blijkt dat iemand die ziek is, na 1 week weer genezen is.

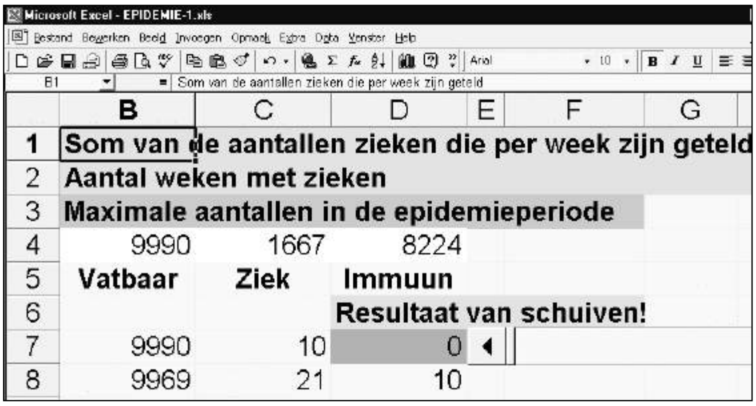
3p **15** ☐ Leg uit hoe dit uit de bovengenoemde recurrente betrekkingen volgt.

Een Excel-spreadsheet bij model 1

Open het Excel-bestand 'EPIDEMIE-1.XLS'.
Deze spreadsheet is gemaakt op basis van bovenstaande recurrente betrekkingen, alleen worden de aantallen elke week afgerond op gehele getallen. Er wordt echter wel doorgerekend met niet-afgeronde waarden.
Wanneer je het bestand opent, geldt $I_0 = 0$ en $k = 0{,}99979$.

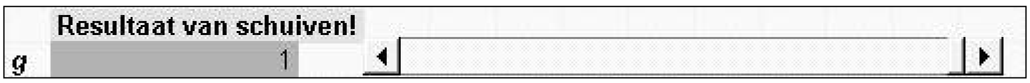


Op het scherm zie je per week hoeveel mensen er vatbaar, ziek en immuun zijn. Deze aantallen staan in de kolommen B, C en D.



De aantallen voor week 1 tot en met 24 staan ook in het staafdiagram. Je ziet dat in week 9, op het hoogtepunt van de epidemie, 1667 mensen ziek zijn.
Als de epidemie voorbij is, zijn er 8224 mensen immuun. Die zijn allemaal ziek geweest en genezen.
De maximale aantallen vatbaren, zieken en immunen in een week van de epidemieperiode staan in rij 4 van de spreadsheet.
Let op: Bijvoorbeeld in week 4 zijn de drie aantallen vatbaren, zieken en immunen samen niet 10 000, maar 10 001. Dat komt door het afronden op gehele getallen.

Verder zie je een schuifbalk voor een factor g.



De schuifbalk staat op 1 en moet voorlopig op 1 blijven staan. Op deze factor komen we later terug.

In de spreadsheet kun je de aantallen vatbaren, zieken en immunen van week 12 aflezen.
5p **16** ☐ Laat met een berekening zien dat je met de bovenstaande recurrente betrekkingen uit deze waarden van week 12 inderdaad die in week 13 kunt berekenen.

Door tijdig mensen te vaccineren kan men zorgen dat al bij het uitbreken van de ziekte een aantal mensen immuun is. Dit aantal is I_0. Om het effect van vaccinatie te bestuderen kun je op het scherm I_0 veranderen. Dat kan door op de plaats van I_0 een getal in te tikken en dan op Enter te drukken, of door te schuiven met de schuifbalk die ernaast staat.

Voor de economie is het belangrijk dat er niet te veel zieken zijn. Door voldoende mensen te vaccineren kan men zorgen dat het aantal zieken per week nooit boven de 1000 komt.

2p **17** □ Onderzoek hoeveel mensen er ten minste gevaccineerd moeten worden om te zorgen dat het aantal zieken per week nooit boven de 1000 komt.

Tot nu toe gingen we ervan uit dat iedere zieke na één week genezen is. Bij veel ziekten geldt dat de genezing niet bij iedereen even lang duurt. We gaan er nu van uit dat elke week slechts een fractie g (g een getal tussen 0 en 1) van de zieken de daaropvolgende week genezen is (en dus immuun wordt).
De recurrente betrekkingen van het model moeten hieraan worden aangepast. De formules voor Z_{n+1}, V_{n+1} en I_{n+1} worden dan:

- $Z_{n+1} = (1 - k^{Z_n}) \cdot V_n + (1 - g) \cdot Z_n$
- $I_{n+1} = I_n + g \cdot Z_n$
- $V_{n+1} = 10\,000 - Z_{n+1} - I_{n+1}$

Hierin is de formule voor V_{n+1} ongewijzigd gebleven.

Ga op het scherm terug naar de situatie waarin er niet ingeënt wordt: $I_0 = 0$.
Neem $k = 0{,}99979$ en $g = 1$.
Door middel van de schuifbalk kan g veranderd worden (niet door een getal in te tikken!).
Voor iedere waarde van g geldt dat wie ziek wordt, gemiddeld ongeveer $\frac{1}{g}$ weken ziek is.
Dus als bijvoorbeeld $g = 0{,}5$ dan zijn de mensen die ziek worden, gemiddeld 2 weken ziek.
Bij $g = 0{,}25$ zullen de mensen gemiddeld 4 weken ziek zijn.

Omdat we ervan uit gaan dat er nu niet ingeënt wordt ($I_0 = 0$), zal het totaal aantal mensen dat ziek is geweest, op het eind gelijk zijn aan het getal in D4.
Als je van iedere week het aantal zieken kent en deze aantallen optelt, krijg je het getal in I1.

4p **18** □ Bereken voor $g = 0{,}2$ en $g = 0{,}1$ de uitkomst van de deling $\frac{\text{I1}}{\text{D4}}$ en leg uit wat deze uitkomsten betekenen.

Model 2

Er zijn ook ziekten waarvoor je niet immuun wordt. Bij dergelijke ziekten is dus $I_n = 0$ voor elke n. Iemand die genezen is, is direct weer vatbaar en kan opnieuw ziek worden.
Als we veronderstellen dat iedereen na één week ziekte weer beter is (dus $g = 1$), dan krijgen we de volgende recurrente betrekkingen:

- $Z_{n+1} = (1 - k^{Z_n}) \cdot V_n$
- $V_{n+1} = 10\,000 - Z_{n+1}$

We gaan bij dit model 2 weer uit van de beginwaarden $Z_0 = 10$ en $V_0 = 9990$.
Doordat er geen immuniteit optreedt, kan een epidemie een heel ander verloop krijgen dan bij model 1.

Sluit Excel af. Het Excel-bestand ‘EPIDEMIE-1.XLS’ *niet opslaan.*
Open het Excel-bestand ‘EPIDEMIE-2.XLS’.
Deze spreadsheet hoort bij model 2. Wanneer je het bestand opent, geldt $k = 0{,}99979$. Je ziet in kolom C dat het aantal zieken toeneemt tot 3362 en dan constant blijft. Dit is een opmerkelijk verschil met model 1 (met immuniteit), waar op den duur niemand meer ziek was.

Afhankelijk van de waarde van k kunnen in dit model 2 drie situaties ontstaan. Het aantal zieken:

- stijgt naar een evenwichtswaarde (zoals je bij $k = 0{,}99979$ op het beeldscherm ziet),
- daalt naar 0 of
- gaat schommelen rond een evenwichtswaarde.

4p **19** ☐ Geef bij de tweede mogelijkheid (het aantal zieken daalt naar 0) en bij de derde mogelijkheid (het aantal zieken gaat schommelen rond een evenwichtswaarde) een voorbeeldwaarde van k.

We bekijken de situatie waarin het aantal zieken nadert naar een evenwichtswaarde.

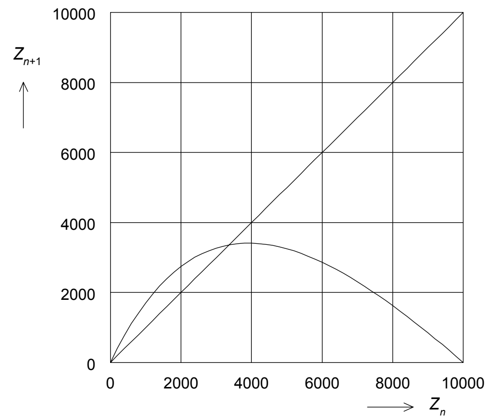
4p **20** ☐ Onderzoek of deze evenwichtswaarde groter dan 5000 kan zijn.
Licht je antwoord toe met een redenering.

Webgrafieken bij model 2

Uit bovenstaande recurrente betrekkingen voor model 2 kan een betrekking worden afgeleid waar alleen het aantal zieken en niet het aantal vatbare personen in voorkomt. Deze betrekking luidt:

- $Z_{n+1} = (1 - k^{Z_n}) \cdot (10000 - Z_n)$

Hiernaast zie je de grafiek van het verband tussen Z_n en Z_{n+1} getekend voor k = 0,99979.
Deze grafiek staat ook (vergroot) op de bijlage.
De hierboven genoemde evenwichtswaarde 3362 vind je in deze grafiek terug bij het snijpunt van de grafiek met de diagonale lijn.



4p **21** ☐ Teken in de figuur op de bijlage de eerste vier stappen van de webgrafiek (dus voor n = 0 tot en met n = 4). Neem Z_0 = 1000.

Sluit Excel af. Het Excel-bestand 'EPIDEMIE-2.XLS' *niet opslaan*.

Einde