Wiskunde A1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 03

Tijdvak 2
Woensdag 18 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal zijn 88 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 16 is een bijlage toegevoegd.

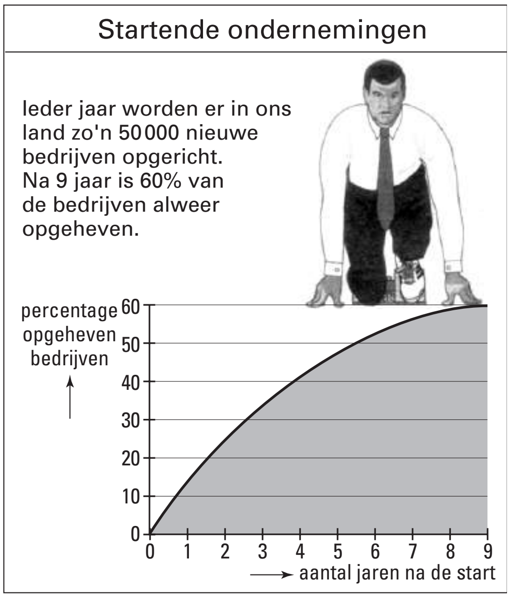
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Startende ondernemingen

In Nederland starten elk jaar ongeveer 50 000 bedrijven. Sommige van deze startende bedrijven verdwijnen weer snel, andere overleven langere tijd. De Kamers van Koophandel houden de gegevens hierover nauwkeurig bij. Op basis hiervan is in figuur 1 weergegeven hoeveel procent van deze bedrijven na een aantal jaren verdwenen is.

figuur 1



We maken een wiskundig model. In dit model gaan we ervan uit dat elk bedrijf elk jaar dezelfde vaste overlevingskans heeft. Uit figuur 1 kun je afleiden dat een startend bedrijf 40% kans heeft om de eerste 9 jaar te overleven. Op grond hiervan kan de jaarlijkse vaste overlevingskans van startende bedrijven worden berekend.

4p **1** ☐ Bereken deze jaarlijkse overlevingskans in vier decimalen nauwkeurig.

In de volgende twee vragen gaan we uit van een jaarlijkse overlevingskans van 0,9.

4p **2** ☐ Bereken de kans dat een startend bedrijf na 4 jaar nog bestaat en onderzoek of deze uitkomst in overeenstemming is met de gegevens van figuur 1.

Bij een steekproef worden uit de landelijke gegevens van de Kamers van Koophandel willekeurig 50 startende bedrijven geselecteerd.

4p **3** ☐ Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat van de 50 startende bedrijven na 1 jaar minstens 45 bedrijven nog bestaan.

Gemeente A heeft door goede begeleiding van startende bedrijven weten te bereiken dat de jaarlijkse overlevingskans voor die bedrijven in deze gemeente op 0,95 uitkomt. Het beleid is erop gericht dat in deze gemeente jaarlijks 144 bedrijven starten. Een ambtenaar heeft namelijk berekend dat er dan ‘een heel grote kans’ is dat na 5 jaar ten minste 100 van deze bedrijven nog bestaan.

5p **4** ☐ Bereken in twee decimalen nauwkeurig hoe groot die kans is.

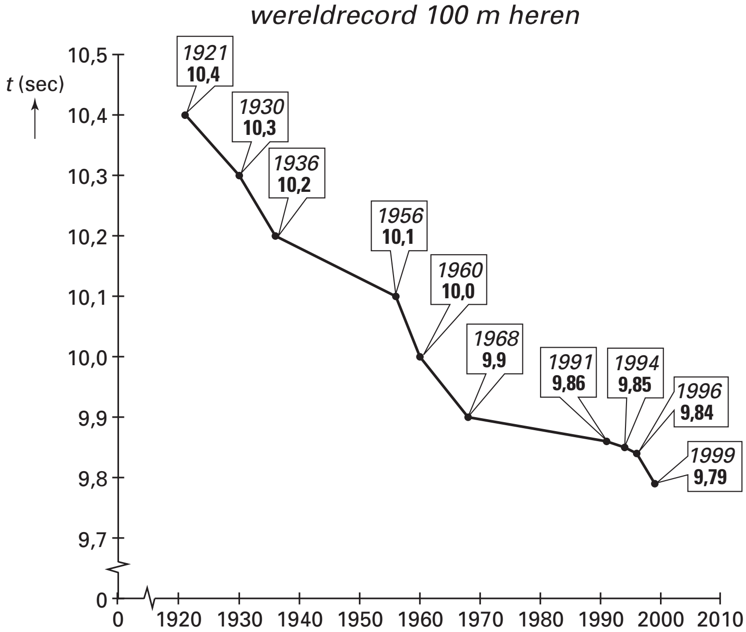
Volgens figuur 1 is de kans 0,60 dat een startend bedrijf in Nederland binnen 9 jaar al weer is opgeheven. Ondanks het feit dat Nederland en België in economisch opzicht als gevolg van Europese regelgeving steeds meer op elkaar zijn gaan lijken, bestaat het vermoeden dat deze kans in België groter is dan 0,60. Om dit vermoeden te onderzoeken, neemt men uit de verzamelde Belgische gegevens een aselecte steekproef van 925 startende bedrijven. Daarvan blijken er 581 binnen 9 jaar te zijn opgeheven.

7p **5** ☐ Onderzoek of dit resultaat het vermoeden bevestigt dat in België de kans dat een startend bedrijf binnen 9 jaar is opgeheven, groter is dan 0,60. Gebruik een significantieniveau van 0,05.

Records

De ontwikkeling van records in de sport is vaak onderzocht. In kranten en tijdschriften worden grafieken getoond waarin die ontwikkeling zichtbaar wordt. In figuur 2 zie je zo'n grafiek. Het gaat om de 100 meter hardlopen voor mannen. De recordtijden zijn in seconden.

figuur 2



Door de ontwikkeling over een langere periode te bekijken is het wellicht mogelijk om voorspellingen te doen voor de verdere ontwikkeling.
Iemand heeft, uitgaande van het vanzelfsprekende feit dat elk wereldrecord beter moet zijn dan het vorige, een model opgesteld voor de ontwikkeling van het wereldrecord op de 100 meter hardlopen voor mannen:

$$W_t = 0,999 \cdot W_{t-1} \text{ met } W_0 = 10,4$$

Hierin is W_t het wereldrecord t jaar na 1921. Dus t is de tijd in jaren en $t = 0$ komt overeen met 1921.

Dit model is tot en met 1968 een redelijke benadering van de werkelijkheid. Daarna zijn de tijden volgens het model lager dan de werkelijke tijden.

5p **6** ☐ Hoeveel procent wijkt het wereldrecord volgens het model in 1999 af van de werkelijkheid?

De tijden volgens het bovenstaande model zouden op den duur in de buurt van 0 seconden komen. Omdat dat niet realistisch is, heeft men het volgende nieuwe model opgesteld, dat ook na 1968 redelijk goed past bij de gegevens uit figuur 2:

$$W_t = 0,9918 \cdot W_{t-1} + 0,075 \text{ met } W_0 = 10,4$$

Hierbij is t weer de tijd in jaren en komt $t = 0$ overeen met 1921.

Volgens dit nieuwe model is in 2000 het wereldrecord 9,80 seconden.

3p **7** ☐ Bereken welke recordtijd dit nieuwe model voor het jaar 2010 voorspelt. Geef je antwoord in 2 decimalen nauwkeurig.

Ook volgens dit nieuwe model zullen de recordtijden steeds lager worden. Maar op den duur zullen de records nauwelijks meer veranderen; ze naderen tot een evenwichtswaarde.

6p **8** ☐ Maak een schets van de webgrafiek bij het nieuwe model. Leg uit hoe je in deze webgrafiek ziet dat de recordtijden steeds lager worden en bereken de evenwichtswaarde.

Hoogte van werkplaatsen

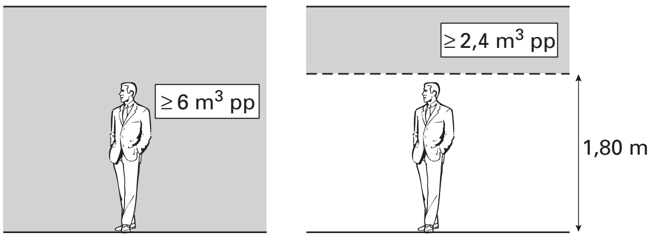
De Arbeidsomstandighedenwet schrijft voor dat bij het bouwen en inrichten van werkplaatsen rekening wordt gehouden met de gezondheid, de veiligheid en het welzijn van de mensen die er werken. Het 'Handboek Ergonomie' geeft op basis daarvan richtlijnen voor de hoogte van werkplaatsen.

Een belangrijk criterium is de hoeveelheid vrije luchtruimte per persoon: dat is de ruimte die per persoon beschikbaar is, buiten de ruimte die de personen zelf innemen.
Het Handboek Ergonomie noemt twee voorwaarden. Voorwaarde A geeft aan hoeveel vrije luchtruimte er ten minste per persoon moet zijn, voorwaarde B zegt hoeveel daarvan zich boven een hoogte van 1,80 m moet bevinden. Zie tabel 1. De twee voorwaarden voor werkplaatsen met maximaal 9 personen worden in figuur 3 nog een keer toegelicht.

tabel 1

	werkplaats voor maximaal 9 personen	werkplaats voor meer dan 9 personen
A. minimale vrije luchtruimte	6 m^3 per persoon	7 m^3 per persoon
B. minimale vrije luchtruimte boven 1,80 m	2,4 m^3 per persoon	2,8 m^3 per persoon

figuur 3



We nemen aan dat een persoon zelf 0,5 m^3 aan ruimte inneemt en niet langer is dan 1,80 m.

Van een bepaalde werkplaats is het vloeroppervlak 40 m^2 en de hoogte 2,50 m. Er werken 9 mensen.

3p **9** ☐ Laat met een berekening zien dat deze werkplaats iets minder dan 11 m^3 vrije luchtruimte per persoon bevat, waarvan ruim 3 m^3 boven 1,80 m.

Een architect ontwerpt een werkplaats. De hoogte van de werkplaats is 3 m. Omdat nog niet vaststaat voor hoeveel personen de werkplaats bestemd is, berekent hij voor verschillende aantallen personen hoe groot het vloeroppervlak volgens tabel 1 ten minste moet zijn.
Hij berekent steeds eerst bij welk vloeroppervlak aan voorwaarde A is voldaan. Het valt hem op dat dan telkens ook aan voorwaarde B is voldaan. Dit blijkt voor elk aantal personen te gelden. We gaan dit alleen na voor meer dan 9 personen.

5p **10** ☐ Toon met een berekening aan dat voor alle werkplaatsen met een hoogte van 3 m die bestemd zijn voor meer dan 9 personen, geldt: als aan voorwaarde A voldaan is, dan is ook aan voorwaarde B voldaan.

Volgens tabel 1 zou een werkplaats lager mogen zijn naarmate het vloeroppervlak groter is. Om te voorkomen dat een ruimte te laag wordt, geeft het Handboek ook nog voorwaarden voor de hoogte. Zo moet een werkplaats met een vloeroppervlak van 200 m^2 een hoogte van ten minste 2,70 m hebben.

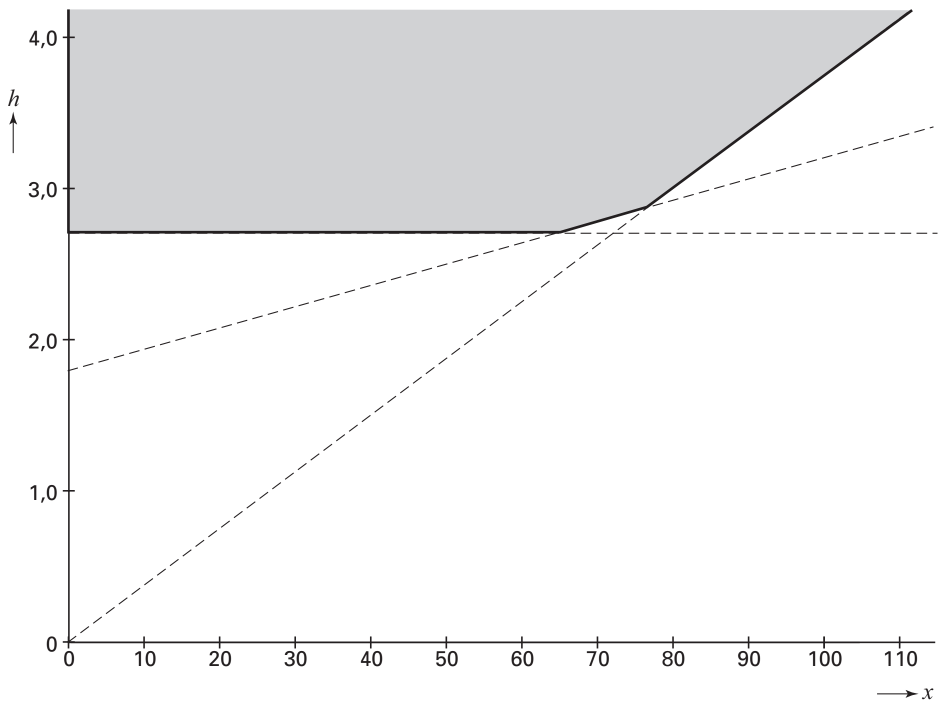
In de rest van deze opgave kijken we naar een werkplaats met een vloeroppervlak van 200 m^2. We noemen de hoogte van zo'n werkplaats h (in meters).
Uit de voorwaarden in tabel 1 volgt dat h afhangt van het aantal personen x waarvoor de werkplaats bestemd is.
Volgens bovengenoemde voorwaarde uit het Handboek is $h \geq 2{,}70$. Bij meer dan 9 personen kunnen we de voorwaarden nu weergeven in de volgende drie formules:

$h \geq 0{,}0375x$ $\qquad$ $h \geq 0{,}014x + 1{,}80$ $\qquad$ en $\qquad$ $h \geq 2{,}70$

4p **11** ☐ Laat zien hoe de formule $h \geq 0{,}014x + 1{,}80$ volgt uit voorwaarde B in tabel 1.

In figuur 4 is voor elke waarde van x aangegeven hoe groot h mag zijn. Het toegestane gebied is grijs aangegeven. Omdat x een aantal personen voorstelt, hebben alleen gehele waarden van x betekenis.

figuur 4



In figuur 4 kun je zien dat voor kleine waarden van x de voorwaarde $h \geq 2{,}70$ de strengste voorwaarde is: als daaraan is voldaan, is zeker aan de andere twee voorwaarden voldaan.
Het komt ook voor dat voorwaarde B uit tabel 1 de strengste voorwaarde is.

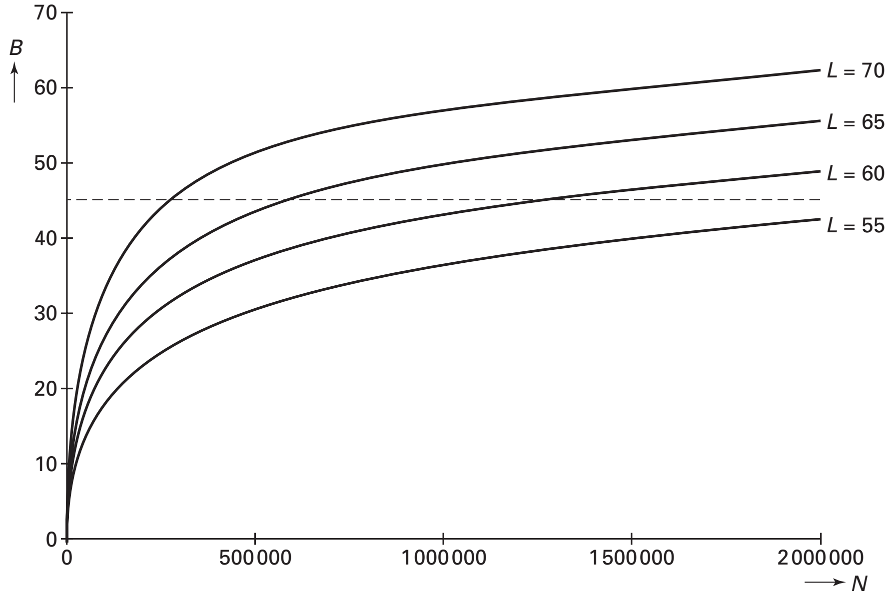
6p **12** ☐ Onderzoek bij welke aantallen personen dat het geval is.

Vliegtuiglawaai

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt.

De geluidsbelasting B op een plaats in de buurt van een vliegveld hangt af van het aantal vliegtuigen dat per jaar passeert en van het geluidsniveau van elk vliegtuig. In deze opgave nemen we aan dat er geen onderlinge verschillen tussen vliegtuigen zijn wat het geluidsniveau betreft. Het geluidsniveau per vliegtuig geven we aan met L. Door nieuwe technieken is het mogelijk dit geluidsniveau per vliegtuig steeds verder omlaag te brengen. Het aantal vliegtuigen per jaar noemen we N. Voor enkele waarden van L is het verband tussen N en B weergegeven in figuur 5.

figuur 5



Zoals gezegd is in milieuwetten vastgelegd hoe groot de geluidsbelasting in de buurt van vliegvelden maximaal mag zijn: $B_{max} = 45$.
De waarde van L is bepalend voor het maximaal toegestane aantal vliegtuigen, N_{max}. In figuur 5 lees je af dat voor $L = 70$ bij benadering geldt: $N_{max} = 270\,000$.
Door het gebruik van nieuwe technieken neemt het geluidsniveau L van vliegtuigen af, zodat N_{max} toeneemt.

3p **13** ☐ Toon aan dat uit figuur 5 blijkt dat een verlaging van het geluidsniveau van vliegtuigen met 5 niet steeds leidt tot eenzelfde toename van N_{max}.

De formule die het verband tussen L, N en B geeft is:

(1) $B = 20 \cdot \log N + \frac{4}{3}L - 157$

Voor L, het geluidsniveau per vliegtuig, geldt op zeker moment: $L = 72$.
Vanzelfsprekend zal een toename van het aantal vliegtuigen ook de geluidsbelasting doen toenemen. Met behulp van de afgeleide $\frac{dB}{dN}$ kun je onderzoeken in welke mate dat het geval is. Men wil weten bij welke waarde van N een toename van 10 000 vliegtuigen de geluidsbelasting met 1 zal doen toenemen.

6p **14** ☐ Stel een formule op voor $\frac{dB}{dN}$ en gebruik $\frac{dB}{dN}$ om deze waarde van N te berekenen.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Sindsdien wordt de geluidsbelasting met een andere formule berekend:

(2) $B = 10 \cdot \log N + L - 79$

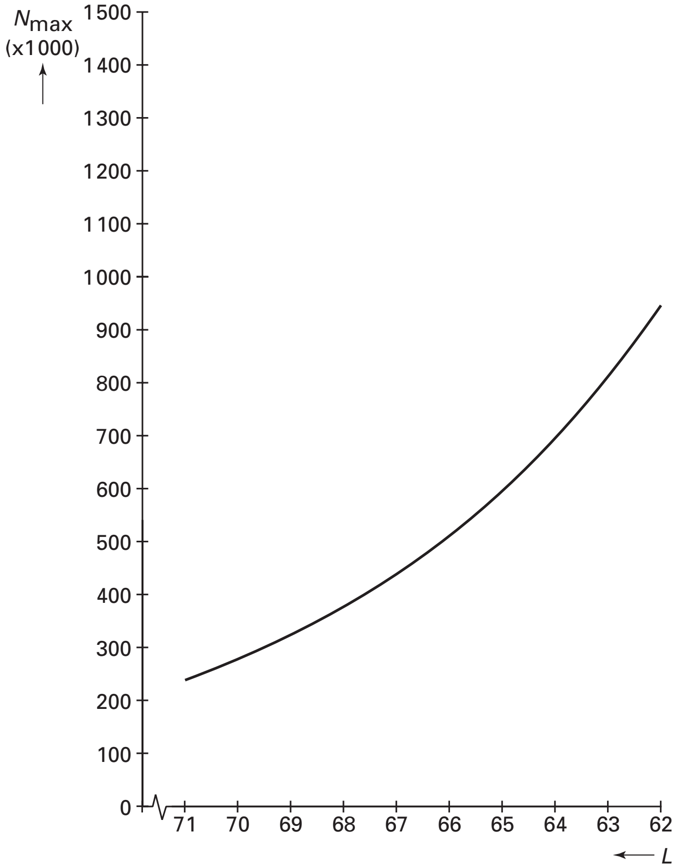
Nog steeds geldt dat de maximale geluidsbelasting, ongeacht de gehanteerde formule, 45 is. Het maximaal toegestane aantal vliegtuigen kan nu geschreven worden als:

$$N_{\max} = 2{,}512 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}794^{L}$$

6p **15** ☐ Laat zien hoe dit volgt uit formule (2) en $B_{\max} = 45$.

In 2001 gold L = 69. Formule (2) is zó bepaald dat de oude en de nieuwe formule in 2001 dezelfde geluidsbelasting gaven rond het vliegveld. Desondanks veroorzaakte deze nieuwe formule veel discussie. We vergelijken de oude en de nieuwe situatie met elkaar. In figuur 6 is voor de oude formule (1) het verband tussen L en $N_{\max}$ getekend. Let op de bijzondere schaalverdeling op de horizontale as: de waarden van L nemen naar rechts *af*. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 6



5p **16** ☐ Schets op de bijlage ook voor de nieuwe formule (2) het verband tussen L en $N_{\max}$ en geef een argument waarom milieugroepen, met betrekking tot het lawaai, kritiek hebben op de nieuwe formule. Gebruik je figuur om je argument te onderbouwen.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Enveloppen

Papiergroothandel P&P levert enveloppen in dozen. P&P heeft de dozen in voorraad in zijn magazijn. Aan het begin van elke week wordt deze voorraad vanuit de fabriek aangevuld tot de zogeheten wekelijkse *beginvoorraad V*. Deze beginvoorraad is zodanig dat in 97% van de weken alle bestellingen van die week direct geleverd kunnen worden. Men zegt dat de *servicegraad* dan 97 is.

In de huidige situatie is het aantal dozen, dat wekelijks bij P&P besteld wordt, bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 6320 dozen en een standaardafwijking van 1800 dozen.

Om de gewenste servicegraad 97 te behalen, zorgt P&P voor een wekelijkse beginvoorraad van 9705 dozen.

3p **17** ☐ Toon aan dat het bedrijf daarmee een servicegraad van ongeveer 97 haalt.

De jaarlijkse voorraadkosten K (in euro's) hangen af van de wekelijkse beginvoorraad V. Er geldt: $K = 4{,}40 \cdot V$.
De bedrijfsleiding wil onderzoeken of het bedrijf bij een andere servicegraad meer winst kan maken. Bij een lagere servicegraad kan men volstaan met een kleinere wekelijkse beginvoorraad, waardoor de voorraadkosten lager worden. Daar staat tegenover dat een lagere servicegraad ten koste van de omzet gaat: er zullen minder dozen besteld worden.

De afdeling Verkoop verwacht dat een verlaging van de servicegraad van 97 naar 96 zal leiden tot een verlaging van het gemiddeld aantal bestelde dozen per week tot 6300 dozen. Het wekelijks aantal bestelde dozen blijft wel bij benadering normaal verdeeld met een standaardafwijking van 1800 dozen.

5p **18** ☐ Toon aan dat de jaarlijkse voorraadkosten met ongeveer 1120 euro afnemen wanneer de servicegraad daalt van 97 naar 96.

Op grond van informatie van de afdeling Verkoop heeft men berekend hoe de voorraadkosten afnemen telkens als de servicegraad 1 lager wordt. Zie tabel 2. Je kunt in deze tabel onder andere de 1120 euro uit vraag 18 terugvinden.

tabel 2

verlaging van de servicegraad	afname voorraadkosten per jaar in euro's
99 → 98	2240
98 → 97	1460
97 → 96	1120
96 → 95	920
95 → 94	800
94 → 93	720
93 → 92	650
92 → 91	600
91 → 90	550

Volgens de afdeling Verkoop zullen telkens als de servicegraad 1 lager wordt, gemiddeld 20 dozen per week minder besteld worden.
De bedrijfsleiding heeft onderzoek laten doen naar de opbrengst. De conclusie luidt: als er gemiddeld 1 doos per week minder besteld wordt, neemt de jaarlijkse opbrengst met 33,80 euro af.
Deze opbrengst moet nog verminderd worden met de voorraadkosten om de winst te bepalen. Op grond van bovenstaande gegevens kiest de bedrijfsleiding als servicegraad een geheel getal, zodat de winst maximaal is.

4p **19** ☐ Welke servicegraad kiest de bedrijfsleiding? Motiveer je antwoord.

Einde