Wiskunde A1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 03

Tijdvak 1
Dinsdag 27 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden. Voor de uitwerking van de vragen 5, 7 en 8 is een bijlage toegevoegd.

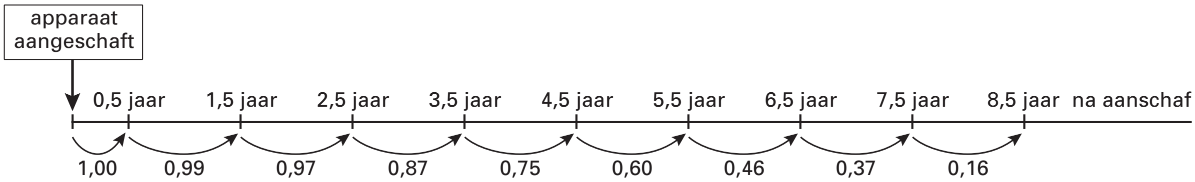
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Levensduur van koffiezetapparaten

Enkele jaren geleden is onderzocht hoe lang nieuw aangeschafte koffiezetapparaten meegaan. Op basis daarvan is een kansmodel gemaakt zoals weergegeven in figuur 1. Hierin is bijvoorbeeld te zien dat alle apparaten een half jaar na aanschaf nog in gebruik zijn. Ook is te zien dat voor een apparaat van 1,5 jaar oud de kans 0,97 is dat het een jaar later nog steeds in gebruik is, en dus de kans 0,03 is dat het in dat jaar wordt afgedankt.

figuur 1



We passen dit model toe op een groep van 1500 nieuwe koffiezetapparaten. De *levensduur* van een apparaat is de tijdsduur tussen het aanschaffen en het afdanken van het apparaat. Uit de gegevens in figuur 1 volgt dat 187 van deze 1500 koffiezetapparaten een levensduur hebben tussen 2,5 en 3,5 jaar.

4p **1** ☐ Laat met een berekening zien dat dit klopt.

Het bovengenoemde aantal 187 vind je terug in tabel 1. De andere aantallen in deze tabel zijn op overeenkomstige wijze berekend.

tabel 1 **Levensduur van 1500 koffiezetapparaten**

levensduur in jaren	aantal koffiezetapparaten
0,5-1,5	15
1,5-2,5	45
2,5-3,5	187
3,5-4,5	313
4,5-5,5	376
5,5-6,5	305
6,5-7,5	163
7,5-8,5	81
>8,5	15

7p **2** ☐ Verwerk de gegevens van tabel 1 op normaal waarschijnlijkheidspapier en toon daarmee aan dat de levensduur bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5,0 jaar en een standaardafwijking van 1,6 jaar.

We nemen voor de rest van deze opgave aan dat de levensduur van koffiezetapparaten normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5,0 jaar en een standaardafwijking van 1,6 jaar.

Iemand heeft 9 jaar geleden zijn eerste koffiezetapparaat gekocht en nu, 9 jaar later, is net zijn derde koffiezetapparaat kapot gegaan. Hij gaat naar de winkel en moppert tegen de verkoper dat dit toch wel heel uitzonderlijk is.
De klant redeneert als volgt: “Drie koffiezetapparaten in negen jaar, dat is drie jaar per apparaat. Je zou verwachten dat zo’n apparaat wel langer dan drie jaar meegaat. De kans dat dit drie keer achter elkaar niet het geval is, is wel heel erg klein.”

5p **3** ☐ Bereken de kans dat drie willekeurig gekozen koffiezetapparaten elk een levensduur van ten hoogste drie jaar hebben.

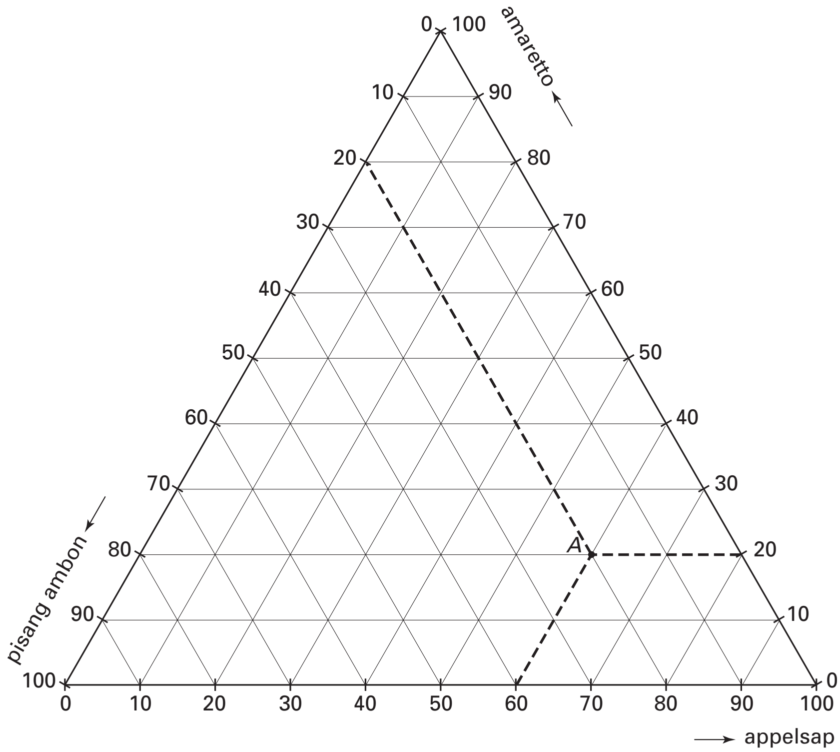
In de winkel worden ook espresso-apparaten van het merk Pressa verkocht. De fabrikant beweert dat de helft van de Pressa-apparaten 8 jaar na aanschaf nog steeds in gebruik is. Maar de verkoper krijgt nogal wat klachten over deze apparaten en is dan ook van mening dat ze minder lang mee gaan.
Op internet vindt hij de resultaten van een onderzoek naar de levensduur van Pressa-apparaten. Daaruit blijkt dat van de 50 onderzochte Pressa-apparaten er 31 een levensduur van minder dan 8 jaar hadden.

6p **4** ☐ Onderzoek of dit resultaat voldoende aanleiding is om de bewering van de fabrikant te verwerpen. Neem een significantieniveau van 5%.

Cocktails

Een cocktail is een drank die wordt gemaakt door enkele basisdranken te mengen. Zo bestaat de cocktail 'Apple Dream' voor 60% uit appelsap, voor 20% uit amaretto en voor 20% uit pisang ambon.
Met deze drie basisdranken kunnen we veel meer cocktails maken door andere mengverhoudingen te gebruiken. Om al deze mengverhoudingen in kaart te brengen gebruikt men vaak een zogenaamd *drie-componentendiagram*. In figuur 2 zie je een afbeelding van zo'n drie-componentendiagram, met daarin het punt A. Dit punt hoort bij de cocktail 'Apple Dream'. Op de bijlage bij deze opgave staat het diagram ook afgebeeld.

figuur 2



De cocktail 'Strong Apple' bestaat voor 20% uit appelsap, voor 30% uit amaretto en voor 50% uit pisang ambon.

3p **5** ☐ Teken op de bijlage in figuur 2 het punt dat hoort bij 'Strong Apple'. Teken duidelijk de hulplijnen die je hebt gebruikt.

Een drankenfabrikant wil uit de drie genoemde basisdranken een cocktail maken. Om na te gaan welke winst hij kan behalen gebruikt hij de volgende gegevens.

basisdrank	kosten per liter in euro's
appelsap	0,25
amaretto	4
pisang ambon	3

De fabrikant wil de cocktail gaan verkopen voor 7,50 euro per liter.

We geven het percentage appelsap waaruit de cocktail bestaat aan met x, het percentage amaretto met y en het percentage pisang ambon met z.
De winst in euro's die de drankenfabrikant maakt op 1 liter cocktail noemen we W. Voor W geldt de volgende formule: $W = 4{,}5 + 0{,}0275x - 0{,}01y$.

4p **6** ☐ Laat zien hoe deze formule voor W uit de gegevens kan worden afgeleid. Bedenk daarbij dat $x + y + z = 100$.

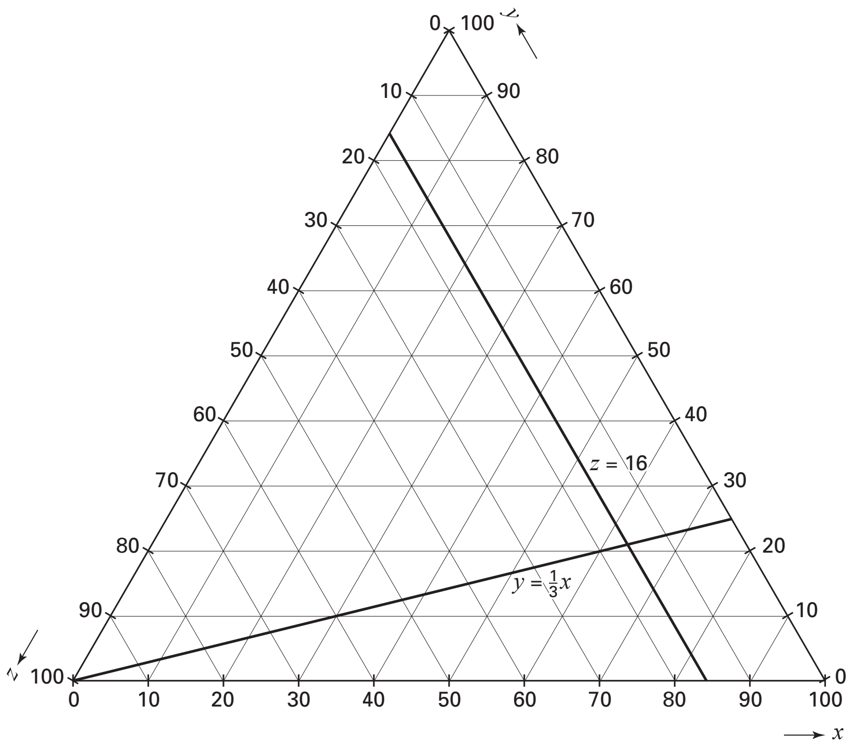
De drankenfabrikant stelt wel enkele voorwaarden aan de cocktail die hij wil maken:

- de cocktail moet voor minstens 16% uit pisang ambon bestaan;
- het percentage amaretto moet minstens even groot zijn als het percentage pisang ambon;
- het percentage appelsap mag hoogstens driemaal zo groot zijn als het percentage amaretto.

We kunnen deze drie voorwaarden als volgt vertalen: $z \geq 16$, $y \geq z$ en $y \geq \frac{1}{3}x$.

In figuur 3 hieronder zijn de twee grenslijnen $z = 16$ en $y = \frac{1}{3}x$ getekend. Figuur 3 staat ook op de bijlage.

figuur 3



4p **7** ☐ Teken op de bijlage in figuur 3 de ontbrekende grenslijn en geef het toegestane gebied aan.

De fabrikant wil weten bij welke mengverhouding van de basisdranken in de cocktail de winst per liter maximaal is en hoe groot deze winst is.

5p **8** ☐ Bereken deze mengverhouding en de winst per liter die de fabrikant bij deze mengverhouding behaalt.

Grondstofverbruik

Ongeveer dertig jaar geleden verscheen het ‘Rapport van de Club van Rome’. Daarin wordt aandacht besteed aan het wereldwijd verbruik van veel grondstoffen. De schrijvers vreesden dat verschillende grondstoffen snel op zouden raken. Bij hun berekeningen hebben zij het begin van het jaar 1970 als uitgangspunt genomen.
Het rapport vermeldt dat begin 1970 de voorraad koper 313 miljoen ton was en dat in 1970 het jaarverbruik van koper 8,7 miljoen ton bedroeg.

De *levensduur* van de voorraad van een grondstof is het aantal jaren vanaf begin 1970 totdat de voorraad van deze grondstof is uitgeput. Daarbij gaan we ervan uit dat er in de tussentijd geen nieuwe voorraden worden ontdekt. Zo is volgens het rapport de levensduur van de voorraad chroom 420 jaar, wanneer je aanneemt dat het jaarlijks verbruik van chroom steeds even groot is als in 1970, namelijk 1,9 miljoen ton.

Als we aannemen dat in de jaren na 1970 ook het jaarlijks verbruik van koper steeds even groot is als dat in 1970, dan is de levensduur van de voorraad chroom veel groter dan die van de voorraad koper.

3p **9** ☐ Hoeveel keer zo groot is dan de levensduur van de voorraad chroom, vergeleken met die van de voorraad koper? Licht je antwoord toe met een berekening.

In werkelijkheid was er ook destijds al sprake van een toenemende vraag naar grondstoffen. In het rapport heeft men hier aandacht aan besteed. Zo veronderstelde men dat vanaf 1970 het verbruik van koper jaarlijks zou groeien met 5,8% en het verbruik van chroom jaarlijks met 3,3%.

5p **10** ☐ Bereken in dat geval vanaf welk jaar het jaarverbruik van koper minstens 6 keer zo groot is als dat van chroom.

Wanneer het grondstofverbruik niet constant is maar jaarlijks groeit met een vast percentage, wordt de levensduur van de voorraad korter. Deze nieuwe levensduur geven we aan met L^*. Om L^* te berekenen gebruikt men de volgende formule:

$$L^* = \frac{230 \cdot \log(L \cdot p + 100) - 460}{p}$$

In deze formule is p het percentage waarmee het verbruik jaarlijks groeit en L de levensduur van de voorraad bij een constant jaarlijks verbruik.

3p **11** ☐ Bereken in welk jaar de voorraad chroom is uitgeput indien het verbruik vanaf 1970 jaarlijks met 3,3% groeit.

Over de grondstof aluminium staat in het rapport het volgende te lezen:

‘Begin 1970 was de wereldvoorraad aluminium $1{,}19 \cdot 10^9$ ton. Bij een jaarlijkse groei van het verbruik met 6,1% zal deze voorraad uitgeput zijn in het begin van het jaar 2000.’

6p **12** ☐ Bereken in welk jaar de voorraad aluminium uitgeput zou zijn indien het jaarverbruik vanaf 1970 constant was gebleven. Gebruik daarbij de formule voor L^*.

Zoals hierboven al vermeld, was in 1970 het jaarverbruik van koper 8,7 miljoen ton. Verder ging men ervan uit dat het verbruik van koper vanaf 1970 jaarlijks zou groeien met 5,8%.
Een formule voor het totale verbruik T_n (in miljoenen tonnen) in de eerste n jaren na 1 januari 1970 ziet er als volgt uit:

$$T_n = 150 \cdot (1{,}058)^n - 150$$

5p **13** ☐ Toon aan dat deze formule juist is voor iedere gehele waarde van n.

Strike it rich

Bij het Engelse televisiespelletje *Strike it rich* speelt een deelnemer in de finale tien rondes. Bij elke ronde krijgt de deelnemer drie beeldschermen voor zich, waar nog niets op te zien is. De deelnemer moet willekeurig één van deze beeldschermen kiezen. Nadat hij een scherm heeft aangewezen, worden alle schermen zichtbaar. Op één van de drie beeldschermen komt *Ga door* te staan, op een ander beeldscherm *Hot Spot*, en op het derde beeldscherm *Vraag*. Voor alle duidelijkheid: deze woorden worden op aselecte wijze op de beeldschermen geplaatst voordat de deelnemer kiest maar worden pas na zijn keuze zichtbaar voor hem.

Het is mogelijk dat een deelnemer in de tien rondes precies één keer een beeldscherm met *Vraag* erop aanwijst.

3p **14** □ Bereken de kans dat dit het geval is. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

De deelnemer kan bij elke ronde een strafpunt krijgen. Daarvoor gelden de volgende regels.
Wanneer op het aangewezen scherm *Ga door* verschijnt, gaat de deelnemer zonder strafpunt door naar de volgende ronde.
Wanneer op het aangewezen scherm *Hot Spot* verschijnt, krijgt de deelnemer een strafpunt en gaat door naar de volgende ronde.
Wanneer op het aangewezen scherm *Vraag* verschijnt, krijgt de deelnemer een vraag gesteld die hij met *ja* of met *nee* moet beantwoorden. Wanneer het antwoord fout is, krijgt hij een strafpunt en gaat door naar de volgende ronde. Wanneer het antwoord goed is, gaat hij zonder strafpunt door naar de volgende ronde.

Uit het bovenstaande volgt dat voor een deelnemer die alle vragen foutloos beantwoordt bij iedere ronde de kans op een strafpunt gelijk is aan $\frac{1}{3}$.
Maar voor een deelnemer die de vragen puur op de gok beantwoordt, dus met 50% kans op het juiste antwoord, is bij iedere ronde de kans op een strafpunt gelijk aan $\frac{1}{2}$.

3p **15** □ Toon de juistheid van deze laatste kans met een berekening aan.

3p **16** □ Bereken voor deze gokkende deelnemer ook de kans dat hij in de tien rondes hoogstens twee strafpunten krijgt. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Vóór het begin van het spel moet de deelnemer kiezen of hij voor maximaal 2, maximaal 3 of maximaal 4 strafpunten speelt. Alle strafpunten die de deelnemer gedurende de tien rondes oploopt, worden opgeteld. Als hij na tien rondes niet meer dan het gekozen aantal strafpunten heeft, krijgt hij een prijs, zoals vermeld in de volgende tabel 2. (£ betekent Britse pond.)

tabel 2

maximum aantal strafpunten waarvoor deelnemer speelt	prijs als het totaal aantal strafpunten niet boven het gekozen maximum aantal strafpunten uitkomt
2	£ 10 000
3	£ 7000
4	£ 5000

Als een deelnemer bijvoorbeeld voor maximaal 3 strafpunten heeft gekozen en hij heeft na de tien rondes 3 of minder strafpunten, dan krijgt hij de geldprijs van £ 7000. Heeft hij 4 of meer strafpunten, dan krijgt hij in dat geval niets.

Voor een deelnemer die alle vragen puur op de gok beantwoordt, is de verwachtingswaarde van de geldprijs zo hoog mogelijk wanneer hij voor maximaal 4 strafpunten speelt.
We vragen ons nu af hoe dat zit met een deelnemer die alle vragen foutloos beantwoordt.

6p **17** □ Onderzoek voor welk maximum aantal strafpunten deze deelnemer moet spelen om te zorgen dat de verwachtingswaarde van de geldprijs zo hoog mogelijk is.

Sportprestaties

In de atletiek kent men verschillende onderdelen. De ene atleet is goed in hardlopen, de andere atleet in hoogspringen of speerwerpen. Iemand die de 100 meter binnen de 11 seconden loopt is een goede sprinter, terwijl iemand die met een polsstok hoger springt dan 5 meter een goede polsstokhoogspringer is. Men kan zich afvragen wie van de twee de betere atleet is. Om prestaties bij verschillende atletiekonderdelen te kunnen vergelijken, hanteert de Koninklijke Nederlandse Atletiek Unie (KNAU) een puntensysteem. Met dit systeem worden sportprestaties omgerekend tot een aantal punten met behulp van verschillende formules. Vanzelfsprekend hoort bij een betere prestatie een groter aantal punten. Zie tabel 3.

tabel 3 **KNAU-puntensysteem voor mannen**

soort sport	formule	onderdeel	a	b
loop-nummers	$P = \frac{a}{t} - b$	100 meter	29550	1881,5
		200 meter	52611,4	1547,1
		400 meter	111960	1433,5
		800 meter	248544	1323,2
		1500 meter	489971,4	1224,7
		3000 meter	1077300	1234,9
spring-nummers	$P = a\sqrt{r} - b$	hoogspringen	2440	2593,5
		verspringen	1094,4	2075,3
		hinkstapsprong	762,9	2074,5
		polsstokhoogspringen	1040	1272,5
werp-nummers	$P = a\sqrt{r} - b$	kogelstoten	462,5	1001,8
		discuswerpen	249,8	893,5
		speerwerpen	190,2	711,3

Voor vrouwen hanteert de KNAU een vergelijkbare tabel.

In tabel 3 lezen we af dat voor hardlopen het behaalde aantal punten P wordt berekend met de formule $P = \frac{a}{t} - b$. Hierbij is t de tijd in seconden die de atleet nodig heeft om de afstand te lopen. De getallen a en b worden afgelezen in de betreffende kolommen.

Als een man de 100 meter in 10,70 seconden loopt, dan heeft hij daarmee 880,2 punten behaald.

3p **18** ☐ Bereken hoeveel seconden, in 2 decimalen nauwkeurig, een man over de 400 meter moet doen om ook 880,2 punten te behalen.

Voor de spring- en werpnummers wordt door de KNAU de formule $P = a\sqrt{r} - b$ gebruikt. Hierin is r de gesprongen hoogte of afstand in meters of de geworpen afstand in meters. Zie tabel 3.
De International Association of Athletics Federations (IAAF) kent ook een puntensysteem. Voor het berekenen van de punten gebruikt de IAAF andere formules dan de KNAU. Bij het speerwerpen voor mannen ziet de IAAF-formule er als volgt uit: $P = 10,14 \cdot (r-7)^{1,08}$.
Wanneer we de formule van speerwerpen voor mannen van de KNAU met die van de IAAF vergelijken, dan blijkt dat voor sommige geworpen afstanden r de formule van de KNAU meer punten oplevert dan de formule van de IAAF.

5p **19** ☐ Onderzoek voor welke waarden van r dat het geval is.

De formules van de KNAU en van de IAAF die horen bij het speerwerpen voor mannen verschillen van elkaar. Dat maakt voor het aantal te behalen punten niet zoveel uit. Er is echter wel een opmerkelijk verschil tussen de grafieken van beide formules: de grafiek van de IAAF stijgt steeds sneller terwijl de grafiek van de KNAU steeds langzamer stijgt.
Dat laatste geldt voor elke formule van de KNAU voor de spring- en de werpnummers.
Voor elke positieve waarde van a hoort bij de formule $P = a\sqrt{r} - b$ een stijgende grafiek.
De stijging van deze grafiek verloopt bovendien steeds minder snel naarmate r toeneemt.

7p **20** ☐ Toon deze laatste bewering aan door gebruik te maken van differentiëren.

Einde