

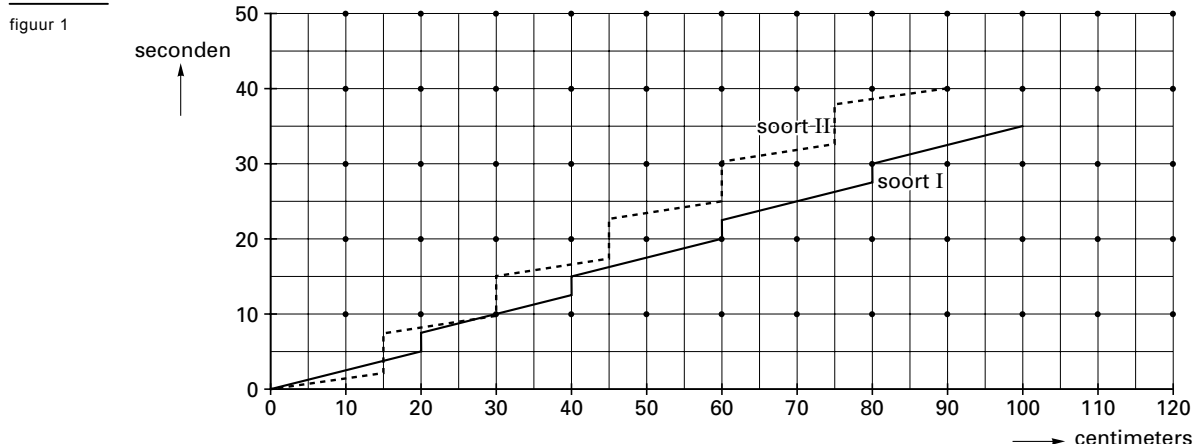
Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden. Voor de uitwerking van de vragen 2, 3 en 9 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vogels die voedsel zoeken

Vogels die voedsel zoeken op de grond vertonen vaak een karakteristiek patroon van lopen en stilstaan. In figuur 1 is dit patroon voor twee vogelsoorten schematisch weergegeven.



Het patroon van soort I heeft de volgende drie kenmerken:

- het stilstaan duurt telkens $2\frac{1}{2}$ seconden;
- tussen twee stops legt de vogel telkens 20 cm af;
- tussen twee stops loopt de vogel met een snelheid van 4 cm per seconde.

4p 1 Lees uit figuur 1 af wat deze drie kenmerken zijn van het patroon van soort II.

Om van een andere vogel (soort III) dit patroon te bepalen, is zo'n vogel gedurende een reeks van 24 keer lopen-en-stilstaan geobserveerd.

De vogel stond in totaal 180 seconden stil.

De afgelegde afstand was in totaal 480 cm.

Het geheel duurde 420 seconden.

5p 2 Teken in het assenstelsel op de bijlage een grafiek zoals figuur 1 van het patroon van deze vogel voor ten minste 45 seconden. Geef een toelichting.

Vogels die hun voedsel in bomen en struiken zoeken, doen dat vaak bij voorkeur op een specifieke hoogte.

Gedurende een winter zijn in een bos voedselzoekende vogels geobserveerd. In tabel 1 staat de verdeling over verschillende hoogtes van 400 waarnemingen bij pimpelmezen.

tabel 1

400 waarnemingen bij pimpelmezen

hoogte in meters	<1,5	1,5–3	3–5	5–7	7–10	10–15	>15
aantal waarnemingen	24	26	51	72	122	92	13

8p 3 Toon aan dat de waargenomen hoogtes bij benadering normaal verdeeld zijn; maak gebruik van het normaal waarschijnlijkheidspapier op de bijlage. Lees uit je tekening af hoe groot het gemiddelde en de standaarddeviatie van deze verdeling zijn. Geef beide antwoorden in dm nauwkeurig. Licht je werkwijze toe.

De hoogtes waarop boomklevers en glanskoppen werden waargenomen, waren ook bij benadering normaal verdeeld. Per soort staan het gemiddelde en de standaarddeviatie van deze waargenomen hoogtes in tabel 2 in meters vermeld.

soort	gemiddelde hoogte	standaarddeviatie
boomklevers	10,0	4,0
glanskoppen	4,5	1,5

Uit de gegevens kun je afleiden dat ongeveer 15% van de boomklevers werd waargenomen op een hoogte tussen 6,0 en 8,0 meter.

- 4p **4** Toon aan met een berekening dat bij glanskoppen ook ongeveer 15% werd waargenomen op een hoogte tussen 6,0 en 8,0 meter.

Reizen

De vereniging Reisvrienden organiseert vakantie-reizen die uitsluitend toegankelijk zijn voor eigen leden. De vereniging kent drie soorten leden: nieuwe leden, gewone leden en kroonleden.

Tot een aantal jaren geleden golden voor het lidmaatschap de volgende regels:

- Elk lidmaatschap geldt altijd voor een heel kalenderjaar.
- Van alle leden die in het laatste jaar geen enkele reis hebben geboekt, wordt het lidmaatschap beëindigd.
- Alle leden die het laatste jaar slechts één reis hebben geboekt, worden (of blijven) gewoon lid.
- Alle leden die het laatste jaar twee of meer reizen hebben geboekt, worden (of blijven) kroonlid.

Aan het eind van elk jaar wordt steeds bekeken hoeveel reizen een lid gemaakt heeft. Wordt het lidmaatschap van iemand beëindigd, dan wordt direct een nieuw lid ingeschreven met ingang van het nieuwe kalenderjaar. Het totale aantal leden blijft dus constant.

Op grond van jarenlange ervaring heeft men destijds de volgende overgangsmatrix M opgesteld. Merk op dat het bij sommige overgangen in feite gaat om vervanging door nieuwe leden.

$$\begin{array}{l} \text{naar} \\ \text{nieuw} \\ \text{gewoon} \\ \text{kroon} \end{array} \begin{array}{l} \text{van} \\ \text{nieuw} \\ \text{gewoon} \\ \text{kroon} \end{array} \begin{pmatrix} 0,16 & 0,40 & 0,10 \\ 0,48 & 0,46 & 0,41 \\ 0,36 & 0,14 & 0,49 \end{pmatrix} = M$$

In de matrix kun je bijvoorbeeld aflezen dat 16% van de nieuwe leden een jaar lang geen reis boekt; aan het eind van het jaar worden zij dus vervangen. Van de kroonleden boekt 41% in het laatste jaar slechts één reis; daardoor worden deze mensen weer 'gewoon' lid.

Het element in de matrix M^2 dat hoort bij 'van nieuw lid naar kroonlid' is niet hetzelfde als de kans dat een willekeurig nieuw lid twee jaar later kroonlid is.

7p **5** Toon dit aan door beide te berekenen.

Met behulp van matrix M heeft men destijds berekend dat de vereniging op den duur elk jaar 25% nieuwe leden zou krijgen.

5p **6** Bereken hoeveel procent gewone leden en hoeveel procent kroonleden de vereniging dan op den duur heeft.

Een aantal jaren geleden nam de ledenvergadering het besluit om bovenstaande regels te versoepelen. Sindsdien gelden de volgende regels:

- Elk lidmaatschap geldt altijd voor een heel kalenderjaar.
- Van alle leden die in de laatste twee jaar geen enkele reis hebben geboekt, wordt het lidmaatschap beëindigd. Dit geldt ook voor iemand die pas één jaar lid is en in dat jaar geen enkele reis heeft geboekt.
- Alle leden die in de laatste twee jaar in totaal slechts één reis hebben geboekt, worden (of blijven) gewoon lid.
- Alle leden die in de laatste twee jaar in totaal twee of meer reizen hebben geboekt, worden (of blijven) kroonlid.

De procedure omtrent het beëindigen van lidmaatschappen en het aannemen van nieuwe leden blijft aan het eind van elk jaar plaatsvinden.

Analyse van de boekingsgegevens van de laatste jaren levert onderstaande tabel 3 op. Hierin staat informatie over het aantal geboekte reizen per lid in een jaar. Daarbij wordt onderscheid gemaakt tussen nieuwe leden, gewone leden en kroonleden, en wordt bovendien gelet op het aantal geboekte reizen in het vorige jaar. Merk op dat het mogelijk is dat een kroonlid vorig jaar geen enkele reis heeft geboekt, maar het jaar daarvoor ten minste twee.

tabel 3

		nieuw lid	gewoon lid		kroonlid		
aantal reizen vorig jaar ►			0	1	0	1	≥ 2
aantal reizen dit jaar	0	15%	45%	35%	40%	20%	20%
	1	60%	40%	50%	35%	65%	45%
	≥ 2	25%	15%	15%	25%	15%	35%

- 5p **7** Uit tabel 3 blijkt bijvoorbeeld dat 60% van de nieuwe leden een jaar later gewoon lid is. Bereken met behulp van tabel 3 hoeveel procent van de nieuwe leden twee jaar later kroonlid is.

De vereniging telt 462 leden die aan het begin van het jaar 2002 als volgt (zie tabel 4) zijn verdeeld over de verschillende categorieën:

tabel 4

		nieuw lid	gewoon lid		kroonlid		
aantal reizen in 2001			0	1	0	1	≥ 2
aantal leden		48	140	120	44	80	30

- 5p **8** Bereken hoeveel kroonleden de vereniging naar verwachting op 1 januari 2003 telt.

Energiebronnen

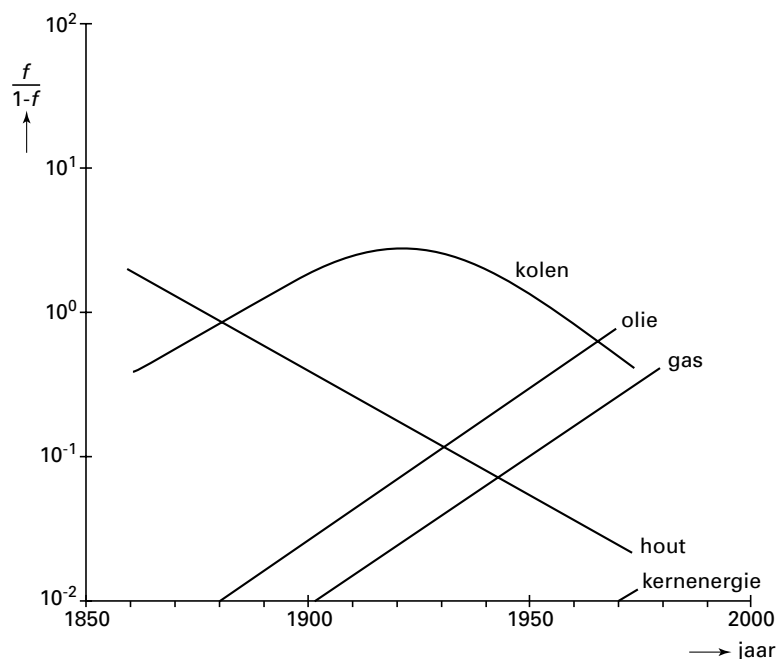
Hout was vroeger de belangrijkste energiebron. In het begin van de negentiende eeuw werd de rol van de belangrijkste energiebron overgenomen door kolen. De laatste jaren is het aandeel van olie en gas in het totale energieverbruik steeds groter geworden.

In het boek 'Energie, een economisch perspectief' besteden de schrijvers Th. v.d. Klundert en H. Peer aandacht aan de ontwikkeling van energiebronnen. Zij gebruiken daarbij de variabele f voor het aandeel van een energiebron zoals dat zich in de loop van de tijd ontwikkeld heeft ten opzichte van het totale energieverbruik. Dit aandeel f is een getal waarvoor geldt dat $0 \leq f \leq 1$. Hierbij betekent $f=0$ dat deze energiebron helemaal niet gebruikt wordt en $f=1$ dat uitsluitend van deze energiebron gebruik gemaakt wordt.

In het boek staat een afbeelding zoals in figuur 2. Door niet f maar $\frac{f}{1-f}$ uit te zetten en

bovendien op de verticale as een aangepaste schaalverdeling te gebruiken, worden de meeste grafieken rechte lijnen. Figuur 2 staat ook op de bijlage.

figuur 2



3p **9** □ In welk jaar leverde hout 50% van het totale energieverbruik? Licht je antwoord toe.

Met figuur 2 hebben de auteurs informatie willen geven over het belang van verschillende energiebronnen door de jaren heen. Opvallend is dat daarbij niet f maar $\frac{f}{1-f}$ wordt gebruikt. Dat kan omdat bij elke waarde van $\frac{f}{1-f}$ precies één waarde van f hoort. Immers, als f toeneemt van 0 tot 1, dan stijgt $\frac{f}{1-f}$ voortdurend.

4p **10** □ Toon die laatste bewering aan met behulp van de afgeleide van $\frac{f}{1-f}$.

Aan de hand van figuur 2 kunnen we voor f_{hout} en voor f_{olie} , het aandeel van hout respectievelijk olie in het totale energieverbruik, de volgende formules afleiden:

$$\frac{f_{\text{hout}}}{1-f_{\text{hout}}} = 3,03 \cdot 0,96^t \quad \text{en} \quad \frac{f_{\text{olie}}}{1-f_{\text{olie}}} = 0,0023 \cdot 1,05^t$$

In deze formules is t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1850.

- 5p **11** Bereken met behulp van deze formules in welk jaar het aandeel van hout even groot was als het aandeel van olie.

Aan de hand van figuur 2 kunnen we voor f_{gas} , het aandeel van gas in het totale energieverbruik, een soortgelijke formule afleiden:

$$\frac{f_{\text{gas}}}{1-f_{\text{gas}}} = a \cdot g^t$$

Ook hier is t weer in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1850.

- 4p **12** Bepaal de waarden van de constanten a en g .

De olievoorraden raken uitgeput en het kolenverbruik heeft veel milieuproblemen tot gevolg. Daarom verwacht men dat het gasverbruik in de komende tijd zal blijven toenemen. Al jaren stijgt het gasverbruik jaarlijks met 3,5% en men gaat ervan uit dat dit in de komende tijd niet zal veranderen.

Deze stijging betekent dat de huidige gasreserves toereikend zijn tot het jaar 2050. Om er voor te zorgen dat de wereld na 2050 nog voldoende gas kan blijven gebruiken, moeten nieuwe voorraden worden ontdekt. Om een indruk te geven van wat dat laatste betekent, is in het boek 'De grenzen voorbij' de volgende figuur opgenomen. In deze figuur 3 geeft elk vierkant en elke rechthoek de verbruikte of benodigde hoeveelheid gas voor een bepaalde periode aan.

figuur 3

vóór 1950	1950- 1970	1990-2010	2030-2050
1970-1990			
2010-2030			
De hoeveelheid gas die nog ontdekt moet worden om ook in de periode 2050-2070 de wereld van gas te kunnen voorzien.			

- 5p **13** Leg met behulp van een berekening uit hoe een jaarlijkse stijging van het gasverbruik met 3,5% in figuur 3 is te herkennen.

Jongen of meisje

In 1988 vond het Onderzoek Gezinsvorming plaats. Hierbij werd onder andere de gezinssamenstelling onderzocht (hoeveel kinderen, hoeveel meisjes, enzovoort). Men waagde zich vervolgens ook aan voorspellingen hoe gezinnen in de toekomst samengesteld zullen zijn. Daarbij beperkten de onderzoekers zich tot een voorspelling over de gezinnen van vrouwen die geboren zijn in 1960. De resultaten staan in tabel 5.

tabel 5

Verwachte uiteindelijke gezinssamenstelling van vrouwen geboren in 1960

	<u>% van alle vrouwen</u>
<u>geen kinderen</u>	18,5
<u>1 kind (totaal)</u>	15,2
1 jongen	7,9
1 meisje	7,3
<u>2 kinderen (totaal)</u>	40,1
2 jongens	10,1
1 jongen en 1 meisje	20,9
2 meisjes	9,1
<u>3 kinderen (totaal)</u>	18,2
3 jongens	2,5
2 jongens en 1 meisje	7,3
1 jongen en 2 meisjes	6,3
3 meisjes	2,1
<u>4 of meer kinderen (totaal)</u>	8,0
uitsluitend jongens	0,5
uitsluitend meisjes	0,5

Een gezin met zowel jongens als meisjes noemt men een gemengd gezin.

- 3p **14** Hoeveel procent van alle in 1960 geboren vrouwen zal volgens tabel 5 uiteindelijk een gemengd gezin hebben? Licht je antwoord toe.

Neem in de rest van de opgave aan dat onder geboorte wordt verstaan de geboorte van één kind, dus geen twee- of meerlingen.

Uit bevolkingsstatistieken van Nederland en andere West-Europese landen vanaf de 18e eeuw is duidelijk dat er steeds iets meer jongens dan meisjes geboren worden. Neem aan dat de kans op een jongen bij elke geboorte 0,51 is en dat op een zekere dag 34 geboortes worden aangegeven bij een ambtenaar van de burgerlijke stand.

- 4p **15** Bereken de kans dat die dag evenveel jongens als meisjes worden aangegeven.

In het verleden hebben velen gezocht naar de factoren die het krijgen van een jongen dan wel een meisje zouden kunnen beïnvloeden. Een van de factoren die mogelijk van belang zijn, is de hormoonspiegel in het bloed van de ouders. Een aanwijzing hiervoor vormen de gegevens die men heeft verkregen over geboortes die tot stand kwamen na toediening van hormonen. Bij 900 van dergelijke geboortes kwam 412 keer een jongen ter wereld.

- 7p **16** Onderzoek of je op grond hiervan mag concluderen dat bij dergelijke geboortes de kans op een jongen kleiner is dan 0,51. Neem hierbij een significantieniveau van 1%.

Lentevoordeelweken

Een supermarkt houdt elk jaar in de lente een actie onder de naam 'Lentevoordeelweken'. Tijdens die actie ontvangt iedere klant bij ten minste 50 euro aan boodschappen twee krasloten. Op elk kraslot staat één vakje. Als men dat openkrast, wordt de afbeelding van een kievitsei, een lammetje, een narcis of een vogelverschrikker zichtbaar.

De klant moet direct aan de kassa, voordat hij de supermarkt heeft verlaten, de twee opengekraste krasloten inleveren. Wanneer op beide krasloten dezelfde afbeelding staat, wint de klant een tegoedbon.

De kans op een tegoedbon hangt af van de verdeling van de vier afbeeldingen over de krasloten.

Neem aan dat de vogelverschrikker op 10% van de krasloten voorkomt en de andere drie afbeeldingen elk op 30% van de krasloten. De krasloten liggen, in willekeurige volgorde, op een stapel bij de kassa.

Een klant heeft zojuist twee krasloten ontvangen.

3p **17** □ Bereken de kans dat de klant met deze twee krasloten een tegoedbon wint.

De eigenaar van de supermarkt wil niet te veel tegoedbonnen weggeven. Daarom onderzoekt hij of een andere verdeling van de afbeeldingen over de krasloten gunstiger is. Hij gaat er daarbij van uit dat de vogelverschrikker met een kans k op de krasloten voorkomt en de overige drie afbeeldingen elk met een kans $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k$. Daarmee kan hij uitrekenen hoe groot de kans is dat een klant met twee krasloten een tegoedbon wint. Die kans is gelijk aan:

$$P(\text{tegoedbon met twee krasloten}) = 1\frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$$

5p **18** □ Toon aan dat de formule voor $P(\text{tegoedbon met twee krasloten})$ juist is.

Met behulp van deze formule kan de eigenaar nu onderzoeken voor welke waarde van k de kans op een tegoedbon zo klein mogelijk is.

4p **19** □ Voer dit onderzoek uit.

Einde