Wiskunde A1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 01

Tijdvak 2
Woensdag 20 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 12 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Opgave 1 Vakkenkeuze

In het voorjaar van 1994 zijn bij een onderzoek naar vakkenkeuze 344 jongens en 493 meisjes ondervraagd die toen eindexamen havo deden.
Nederlands was voor iedereen verplicht. Havo-leerlingen moesten naast Nederlands nog ten minste 5 andere vakken kiezen.
In tabel 1 is te zien door hoeveel procent van de ondervraagden de andere vakken zijn gekozen.

tabel 1 Vakkenkeuze van jongens en meisjes op havo

vak	jongens (in %)	meisjes (in %)
Duits	31,1	46,7
Engels	98,8	97,6
Frans	10,2	38,5
Aardrijkskunde	19,2	28,2
Geschiedenis	25,3	30,2
Economie	60,2	47,9
Handelswetenschappen	43,0	29,8
Wiskunde A	43,3	62,3
Wiskunde B	54,7	22,3
Biologie	23,5	45,2
Natuurkunde	57,6	17,0
Scheikunde	42,2	24,5
Tekenen	7,0	15,2
Maatschappijleer	2,9	4,5
Muziek	0,9	3,4
Handenarbeid	2,3	4,9
Textiele werkvormen	0,0	0,4
Spaans	0,0	0,6

2p **1** □ Toon aan dat van de ondervraagde leerlingen meer meisjes dan jongens economie deden.

De meeste leerlingen hadden naast Nederlands 5 vakken gekozen. Sommige leerlingen hadden naast Nederlands 6 vakken gekozen. Geen van de leerlingen had naast Nederlands meer dan 6 vakken gekozen.

3p **2** □ Bereken hoeveel procent van de ondervraagde meisjes een extra vak deed.

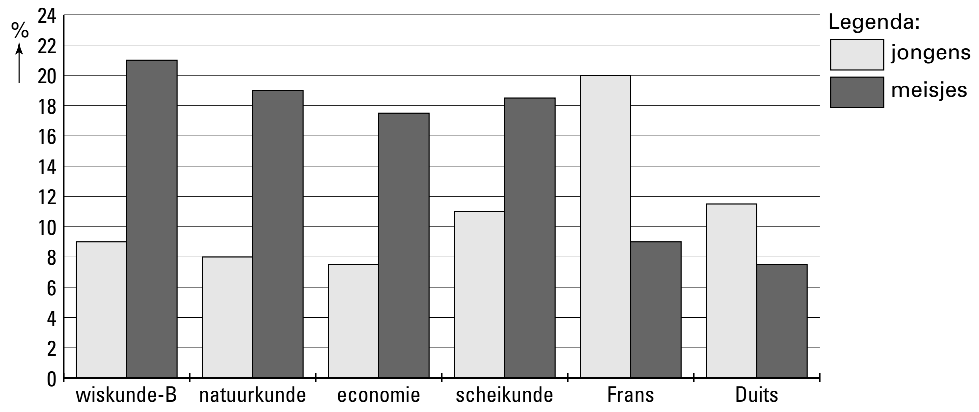
Bij het onderzoek werd ook gevraagd of je, als je opnieuw zou mogen kiezen, weer precies hetzelfde vakkenpakket gekozen zou hebben. De onderzoekers vermoedden dat ten minste de helft van de kandidaten ontevreden was over hun huidige pakket. Een onderwijsdeskundige was het daar niet mee eens. Kort voor het onderzoek beweerde hij dat minder dan de helft van alle havo-eindexamenkandidaten achteraf liever een ander pakket gekozen zou hebben.
Neem aan dat de groep van 837 ondervraagde leerlingen een aselecte steekproef vormt uit alle havo-eindexamenkandidaten. Van deze groep zouden 359 leerlingen een ander pakket gekozen hebben, zo bleek uit het onderzoek.

7p **3** □ Onderzoek of bij een significantieniveau van 1% het onderzoeksresultaat voldoende aanleiding geeft om de onderwijsdeskundige gelijk te geven.

De leerlingen moesten ook aangeven wélke vakken ze zouden willen vervangen. Voor enkele vakken staat het resultaat in figuur 1. Bijvoorbeeld: van alle meisjes met wiskunde B zou ongeveer 21% dat vak achteraf liever niet hebben gekozen.

figuur 1

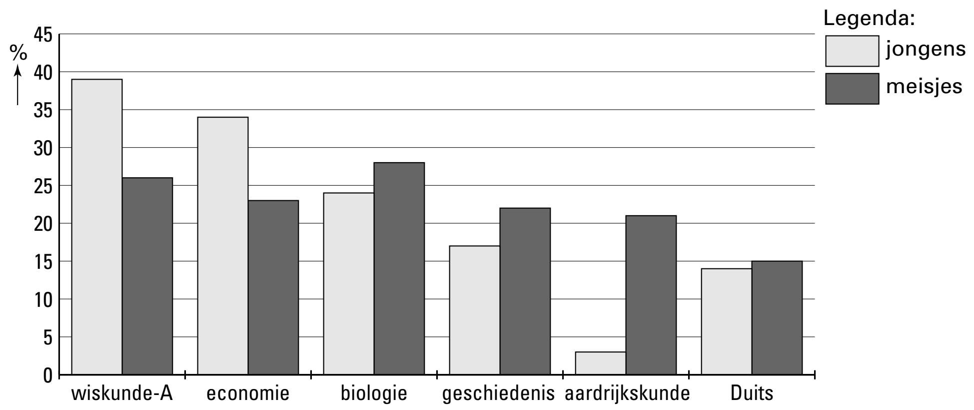
Spijtpercentage per vak voor jongens en meisjes apart



Aan de leerlingen die ten minste één ander vak gekozen zouden hebben, werd ook gevraagd welk nieuw vak of welke nieuwe vakken ze zouden kiezen. In figuur 2 staat voor enkele vakken het resultaat. Bijvoorbeeld: van de meisjes die ten minste één ander vak gekozen zouden hebben, zou ruim 25% wiskunde A kiezen. (Merk op dat veel leerlingen meer dan één nieuw vak zouden kiezen, waardoor het totaal zelfs over deze zes vakken al ver boven de 100% komt.)

figuur 2

Voorkeur voor vervangingsvakken van jongens en meisjes op de havo



Er waren 127 jongens en 232 meisjes die ten minste één ander vak zouden kiezen.
Stel dat alle leerlingen het achteraf gewenste pakket hadden gekozen.

7p **4** □ Onderzoek of dan nog steeds meer meisjes dan jongens economie zouden doen.
Maak hierbij gebruik van de resultaten van vraag 1 en van de figuren 1 en 2.

Opgave 2 Persoonlijke lening

Iemand heeft bij een bank een persoonlijke lening afgesloten van *f* 80 000,–. Voor rente en aflossing betaalt hij aan het eind van elke maand een vast bedrag, namelijk *f* 720,–. De bank brengt hem 0,7% rente per maand over het restant van de lening in rekening.

L_0 is het beginbedrag: *f* 80 000,–. L_t is het restant van de lening direct na het einde van de t^e maand. L_t berekent men als volgt:
Eerst wordt het restant aan het eind van de vorige maand (L_{t-1}) vermeerderd met de verschuldigde rente en daarna wordt de *f* 720,– er van af getrokken. Er wordt bij alle bedragen gerekend in guldens.
Het model dat hier bij hoort, ziet er dus als volgt uit:

$$L_t = 1{,}007 \cdot L_{t-1} - 720$$
$$L_0 = 80\,000$$

In de tabel hieronder kun je voor de eerste paar maanden zien hoe groot het restant van de lening is aan het eind van elke maand.

tabel 2

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
L_t	80 000,-	79 840,-	79 678,88	79 516,63	79 353,25

3p **5** □ Bereken L_6.

Het maandbedrag van *f* 720,– bestaat voor een deel uit de verschuldigde rente en voor een deel uit aflossing. Met behulp van tabel 2 kunnen we bijvoorbeeld nagaan dat aan het einde van de eerste maand *f* 160,– van de lening is afgelost. De maandelijkse aflossing aan het einde van de t^e maand geven we aan met A_t. Dus we hebben de volgende formule:

$$A_t = 720 - 0{,}007 \cdot L_{t-1}$$

Door deze aflossing wordt het restant van de lening elke maand kleiner.
In formulevorm:

$$L_t = L_{t-1} - A_t$$

Met behulp van tabel 2 kun je nagaan dat $A_1 = 160$.
Doordat het restant van de lening, en dus ook de verschuldigde rente, steeds kleiner wordt, wordt de aflossing steeds groter. Dit kan beschreven worden met de volgende formule:

$$A_{t+1} = 1{,}007 \cdot A_t$$

4p **6** □ Toon met behulp van het voorgaande aan dat deze formule juist is.

Op een bepaald moment is het restant van de lening plus de rente daarover *f* 720,– of minder. Dit vormt dan het laatste maandbedrag, en daarmee is de lening afgelost.

5p **7** □ Toon aan dat de lening na 216 maanden is afgelost.

Opgave 3 Geboorte

In de kansrekening gaat men er vaak van uit dat bij een geboorte de kans op een jongen even groot is als de kans op een meisje, namelijk 0,5. In werkelijkheid worden er iets meer jongens geboren dan meisjes. Bij elke geboorte is de kans op een jongen ongeveer 0,51.

Wanneer we bijvoorbeeld de kans willen berekenen dat een gezin met 4 kinderen bestaat uit twee jongens en twee meisjes, dan kunnen we gebruik maken van de bovengenoemde 0,5. Maar we kunnen die kans ook berekenen met behulp van de bovengenoemde 0,51. De twee uitkomsten die we krijgen, zijn niet even groot.

4p **8** □ Bereken hoeveel beide uitkomsten van elkaar verschillen.

Ook bij de Europese vorstenhuizen is de kans dat een jongen wordt geboren, gelijk aan 0,51. Toch zijn er bij de 500 geboortes die de afgelopen eeuwen bij de Europese vorstenhuizen plaatsvonden maar liefst 285 jongens geboren. De kans op zo'n groot aantal jongens is niet zo groot.

4p **9** □ Bereken de kans dat er bij 500 geboortes minstens 285 jongens zijn.

De Nieuw-Zeelandse arts Grant heeft onderzocht of de kans op een jongen, en daarmee dus ook de kans op een meisje, afhangt van persoonlijkheidskenmerken van de moeder. In het onderzoek deelde zij de moeders in vijf categorieën in: zeer meegaand, meegaand, bescheiden, dominant en zeer dominant. Uit haar onderzoek bleek dat de kans op een meisje bij een zeer meegaande moeder vijf keer zo groot is als de kans op een meisje bij een zeer dominante moeder.

Als de uitkomst van het onderzoek van Grant juist is, is de kans op een jongen bij een zeer dominante moeder, zo valt na te rekenen, groter dan 0,8. Dat betekent dat deze kans dus zeker niet gelijk kan zijn aan bijvoorbeeld 0,75.

3p **10** □ Laat door een berekening zien dat deze kans inderdaad niet gelijk kan zijn aan 0,75.

Uit de uitkomst van Grants onderzoek mag je niet de conclusie trekken dat de kans op een jongen bij een zeer dominante moeder vijf keer zo groot is als bij een zeer meegaande moeder.

3p **11** □ Laat met behulp van een getallenvoorbeeld zien dat je die conclusie inderdaad niet mag trekken.

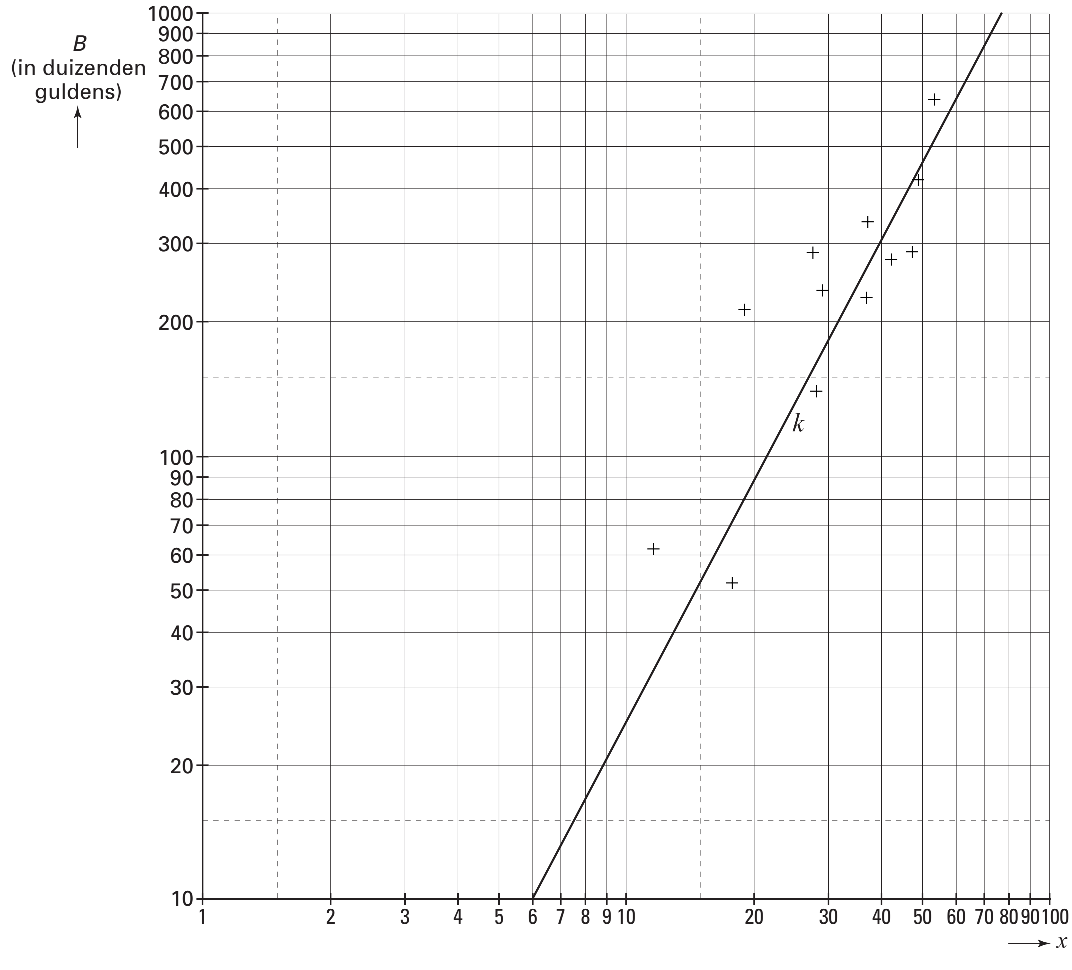
Opgave 4 Kavelkosten

Een gemeente wil uitbreiden door het bouwen van een nieuwe wijk. De plaats waar de nieuwe wijk gebouwd zal worden, is vastgesteld. Voordat de gemeente het uitbreidingsplan laat uitvoeren, doet de gemeente onderzoek naar de kosten van het plan. Er zijn twee soorten kosten voor de gemeente:

- de kosten van aankoop van de grond. In deze situatie bedragen de kosten 170 000 gulden per hectare (1 hectare = 10 000 m^2).
- de kosten van het bouwrijp maken. Dit betreft kosten voor de aanleg van bijvoorbeeld wegen, rioleringen en groenvoorzieningen. Deze kosten zijn hoger naarmate het aantal woningen dat per hectare gebouwd zal worden groter is.

In figuur 3 zijn kosten van diverse vergelijkbare projecten door middel van plusjes weergegeven. Zowel langs de horizontale als langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Hierbij is x het aantal woningen per hectare. B stelt voor de kosten per hectare van het bouwrijp maken in duizenden guldens. Op grond van de plusjes in figuur 3 is een grafiek (de lijn k in figuur 3) getekend die het verband tussen B en x weergeeft. De figuur staat ook op de bijlage afgebeeld.

figuur 3



De lijn k beschrijft een theoretisch model waarmee B kan worden berekend.
De werkelijke kosten bij de onderzochte projecten (de plusjes in de figuur) wijken soms aanzienlijk af van de kosten volgens dit model. Kijk bijvoorbeeld maar naar de kosten van het project dat hoort bij $x \approx 19$.

5p **12** □ Onderzoek of de werkelijke waarde van B van dit project meer dan 100% afwijkt van de waarde van B volgens het model.

Ga er in de rest van de opgave van uit dat $B = 0{,}4 \cdot x^{1{,}8}$.

We gaan er voor het gemak van uit dat alle woningen hetzelfde zullen zijn. De totale kosten per woning voor de gemeente bestaan uit de volgende onderdelen:

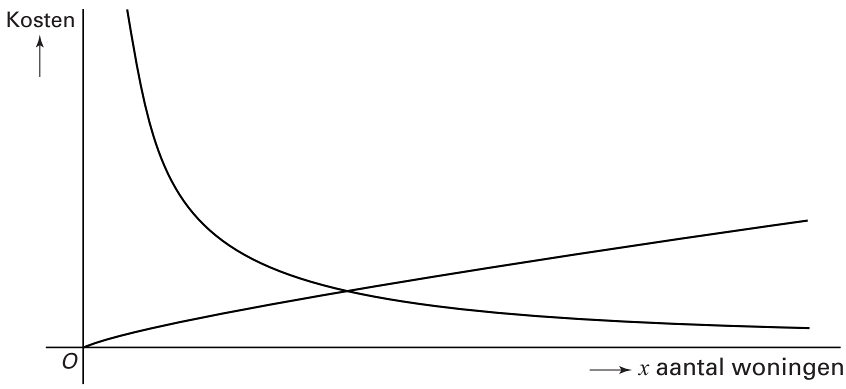
- de aankoopkosten van de grond per woning $K_A = 170 \cdot x^{-1}$
- de kosten voor het bouwrijp maken van de grond $K_B = 0{,}4 \cdot x^{0{,}8}$

In deze formules zijn K_A en K_B in duizenden guldens.

4p **13** □ Laat zien hoe de formules van K_A en K_B tot stand zijn gekomen.

In figuur 4 zie je een schets van de grafieken van K_A en K_B.

figuur 4



Neem aan dat de gemeente er naar zal streven om de totale kosten per woning zo klein mogelijk te maken.

6p **14** □ Stel een formule op voor de afgeleide van de functie die de totale kosten per woning weergeeft en onderzoek met behulp daarvan of het minimum van de totale kosten per woning bereikt wordt als K_A en K_B even groot zijn.

In de toekomst zal de gemeente nog meer stukken grond aankopen. De grondprijs per ha zal echter in de toekomst kunnen stijgen. Daardoor zal ook het aantal woningen dat per ha gebouwd moet worden om de totale kosten zo klein mogelijk te maken, veranderen. Een ambtenaar onderzoekt dit probleem met zijn grafische rekenmachine. Hij gebruikt daarbij de volgende uitgangspunten:

- de grondprijs per ha G (in duizenden guldens) zal tussen 170 en 250 liggen;
- bij iedere grondprijs G kun je met de formule $K_T = G \cdot x^{-1} + 0{,}4 \cdot x^{0{,}8}$ berekenen hoe de totale kosten per woning K_T afhangen van x, het aantal woningen per ha. Bij iedere waarde van G is er precies één waarde van x die de *minimale* kosten per woning oplevert.

In zijn rapport vermeldt de ambtenaar dat het voor $G = 230$ het goedkoopst is om 39 woningen per ha te bouwen. Hij heeft daarbij het aantal woningen per ha afgerond op gehelen. Maar er zijn nog meer waarden van G waarbij de totale kosten per woning minimaal zijn wanneer er (afgerond) 39 woningen per ha gebouwd worden.

4p **15** □ Onderzoek voor welke waarden van G dit laatste het geval is. Geef de gevonden waarden van G in duizenden guldens nauwkeurig.

Opgave 5 Kantine

In de kantine van een bedrijf worden twee warme lunches aangeboden: een 'exotische lunch' en een 'Hollandse lunch'. De kantinebeheerder mag hiervan zelf de prijs bepalen. De beheerder merkt dat de verkoopprijs van één maaltijd van invloed is op de verkochte aantallen van beide maaltijden. We nemen aan dat het volgende stelsel vergelijkingen is op te stellen voor het verband tussen de verkoopprijzen en de aantallen verkochte maaltijden:

$$\begin{cases} a = 2500 - 3000x + 3500y \\ b = 5000 + 2500x - 5000y \end{cases}$$

Hierbij is a het aantal verkochte exotische lunches per maand en b het aantal verkochte Hollandse lunches per maand. Verder is x de verkoopprijs (in guldens) van de exotische lunch en y de verkoopprijs (in guldens) van de Hollandse lunch.

De totale kosten die de beheerder maakt zijn *f* 3,– voor een exotische lunch en *f* 2,– voor een Hollandse lunch.

De beheerder wil weten hoe groot de winst is als een exotische lunch voor *f* 3,25 en een Hollandse lunch voor *f* 2,25 verkocht wordt.

4p **16** □ Bereken in deze situatie de winst per maand op exotische lunches en de winst per maand op Hollandse lunches.

TK zijn de totale kosten per maand in guldens. W is de totale winst per maand in guldens. TK zowel als W kunnen worden uitgedrukt in x en y:

$$TK = 500y - 4000x + 17\,500$$
$$W = -3000x^2 + 6000xy - 5000y^2 + 6500x + 4500y - 17\,500$$

4p **17** □ Toon de juistheid van de formule voor W aan. Gebruik daarbij eventueel de bovenstaande formule voor TK.

Het stelsel vergelijkingen voor het verband tussen x, y, a en b is slechts geldig voor $a \geq 0$ en $b \geq 0$. Bovendien worden de maaltijden niet verkocht onder de kostprijs dus $x \geq 3$ en $y \geq 2$. Deze beperkingen leiden ertoe dat het hierboven omschreven model (het stelsel vergelijkingen voor het verband tussen x, y, a en b) slechts geldig is op een beperkt gebied voor x en y.

7p **18** □ Teken dit toegestane gebied in een xy-assenstelsel.

Het doel van de beheerder is om de verkoopprijzen zodanig vast te stellen dat zijn maandelijkse winst zo hoog mogelijk is.

De beheerder rekent, uitgaande van de formule voor W, eerst een getallenvoorbeeld door.
Hij kiest $y = 3$.

5p **19** □ Bereken bij welke verkoopprijs van een exotische lunch de winst in dat geval zo hoog mogelijk is.

In tabel 3 is voor een aantal andere keuzen van y af te lezen bij welke verkoopprijs van een exotische lunch de winst zo hoog mogelijk is. Ook is steeds die hoogste winst berekend.

tabel 3

keuze y	beste x	getallenpaar (x, y)	W
2,10	3,18	(3,18; 2,10)	300,80
2,20	3,28	(3,28; 2,20)	540,80
2,25	3,33	(3,33; 2,25)	645,80

In tabel 4 is voor een aantal keuzen van x af te lezen bij welke verkoopprijs van een Hollandse lunch de winst zo hoog mogelijk is. Ook hier is steeds die hoogste winst berekend.

tabel 4

keuze x	beste y	getallenpaar (x, y)	W
3,10	2,31	(3,10; 2,31)	500,50
3,20	2,37	(3,20; 2,37)	664,50
3,30	2,43	(3,30; 2,43)	804,50

De punten die horen bij de getallenparen (x, y) uit tabel 3 liggen op een rechte lijn. Ook de punten die horen bij de getallenparen (x, y) uit tabel 4 liggen op een rechte lijn. Het snijpunt van deze twee lijnen levert de verkoopprijzen met maximale winst.

6p **20** □ Bereken nu de maximale winst voor de beheerder.

Einde