Wiskunde A1 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 01

Tijdvak 2
Woensdag 20 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 13, 14 en 20 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Opgave 1 Vakkenkeuze

In het voorjaar van 1994 zijn bij een onderzoek naar vakkenkeuze 344 jongens en 493 meisjes ondervraagd die toen eindexamen havo deden.
Nederlands was voor iedereen verplicht. Havo-leerlingen moesten naast Nederlands nog ten minste 5 andere vakken kiezen.
In tabel 1 is te zien door hoeveel procent van de ondervraagden de andere vakken zijn gekozen.

tabel 1 Vakkenkeuze van jongens en meisjes op havo

vak	jongens (in %)	meisjes (in %)
Duits	31,1	46,7
Engels	98,8	97,6
Frans	10,2	38,5
Aardrijkskunde	19,2	28,2
Geschiedenis	25,3	30,2
Economie	60,2	47,9
Handelswetenschappen	43,0	29,8
Wiskunde A	43,3	62,3
Wiskunde B	54,7	22,3
Biologie	23,5	45,2
Natuurkunde	57,6	17,0
Scheikunde	42,2	24,5
Tekenen	7,0	15,2
Maatschappijleer	2,9	4,5
Muziek	0,9	3,4
Handenarbeid	2,3	4,9
Textiele werkvormen	0,0	0,4
Spaans	0,0	0,6

2p **1** □ Toon aan dat van de ondervraagde leerlingen meer meisjes dan jongens economie deden.

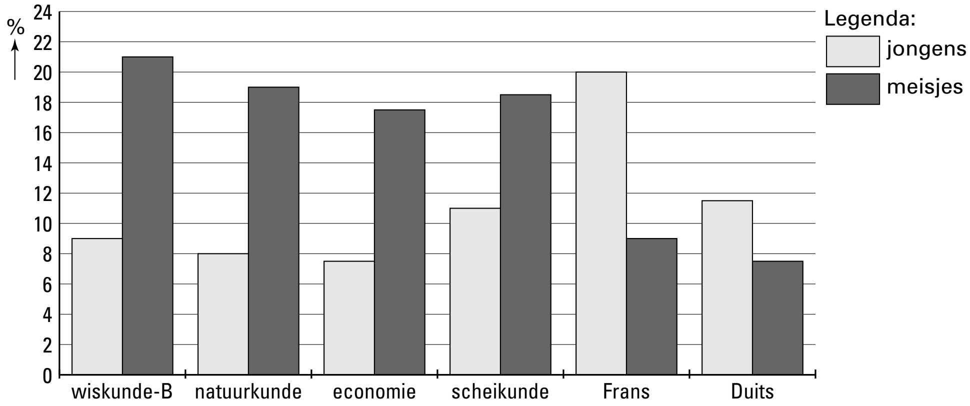
De meeste leerlingen hadden naast Nederlands 5 vakken gekozen. Sommige leerlingen hadden naast Nederlands 6 vakken gekozen. Geen van de leerlingen had naast Nederlands meer dan 6 vakken gekozen.

3p **2** □ Bereken hoeveel procent van de ondervraagde meisjes een extra vak deed.

De onderzoekers vermoedden dat veel kandidaten ontevreden waren over hun huidige vakkenpakket. Bij het onderzoek werd ook gevraagd of je, als je opnieuw zou mogen kiezen, weer precies hetzelfde pakket gekozen zou hebben.
De leerlingen moesten daarbij aangeven wélke vakken ze zouden willen vervangen. Voor enkele vakken staat het resultaat in figuur 1. Bijvoorbeeld: van alle meisjes met wiskunde B zou ongeveer 21% dat vak achteraf liever niet hebben gekozen.

figuur 1

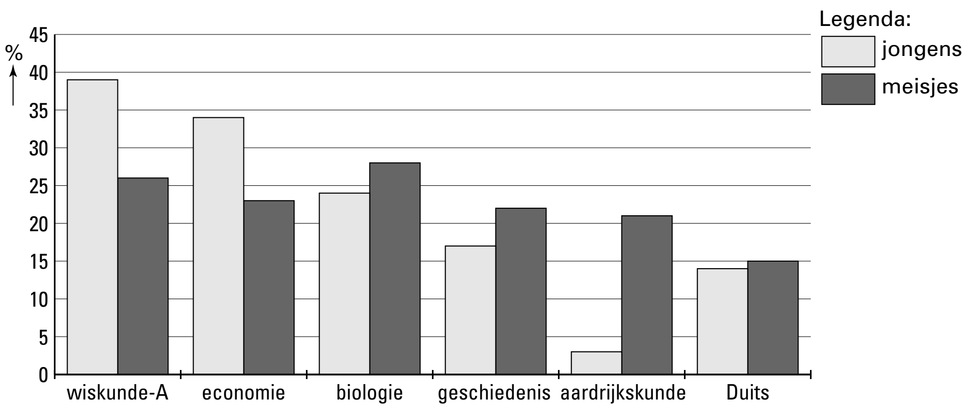
Spijtpercentage per vak voor jongens en meisjes apart



Aan de leerlingen die ten minste één ander vak gekozen zouden hebben, werd ook gevraagd welk nieuw vak of welke nieuwe vakken ze zouden kiezen. In figuur 2 staat voor enkele vakken het resultaat. Bijvoorbeeld: van de meisjes die ten minste één ander vak gekozen zouden hebben, zou ruim 25% wiskunde A kiezen. (Merk op dat veel leerlingen meer dan één nieuw vak zouden kiezen, waardoor het totaal zelfs over deze zes vakken al ver boven de 100% komt.)

figuur 2

Voorkeur voor vervangingsvakken van jongens en meisjes op de havo



Er waren 127 jongens en 232 meisjes die ten minste één ander vak zouden kiezen. Stel dat alle leerlingen het achteraf gewenste pakket hadden gekozen.

7p **3** □ Onderzoek of dan nog steeds meer meisjes dan jongens economie zouden doen. Maak hierbij gebruik van de resultaten van vraag 1 en van de figuren 1 en 2.

Opgave 2 Persoonlijke lening

Iemand heeft bij een bank een persoonlijke lening afgesloten van *ƒ* 80 000,–. Voor rente en aflossing betaalt hij aan het eind van elke maand een vast bedrag, namelijk *ƒ* 720,–. De bank brengt hem 0,7% rente per maand over het restant van de lening in rekening.

L_0 is het beginbedrag: *ƒ* 80 000,–. L_t is het restant van de lening direct na het einde van de t^e maand. L_t berekent men als volgt:
Eerst wordt het restant van de lening na $t - 1$ maanden vermeerderd met de verschuldigde rente en daarna wordt de *ƒ* 720,– er van af getrokken.

In de tabel hieronder kun je voor de eerste paar maanden zien hoe groot het restant van de lening is aan het eind van elke maand. Er wordt bij alle bedragen gerekend in guldens.

tabel 2

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
L_t	80 000,-	79 840,-	79 678,88	79 516,63	79 353,25

3p **4** □ Bereken L_6.

Het maandbedrag van *ƒ* 720,– bestaat voor een deel uit rente die betaald moet worden en voor een deel uit aflossing. Met behulp van tabel 2 kunnen we nagaan dat er aan het eind van de 1^e maand *ƒ* 160,– van de lening wordt afgelost. Aan het eind van de 2^e maand wordt *ƒ* 161,12 afgelost. De aflossing aan het eind van de t^e maand geven we aan met A_t. In tabel 3 zie je voor de eerste paar maanden hoe groot de aflossing is die er aan het eind van elke maand plaatsvindt.

tabel 3

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
A_t	160,-	161,12	162,25	163,38

Omdat het restant van de lening steeds kleiner wordt, zal de aflossing A_t toenemen. Het blijkt dat A_t exponentieel groeit.

4p **5** □ Laat zien dat bij de waarden van A_t in tabel 3 sprake is van exponentiële groei.

Het is mogelijk deze exponentiële groei in een formule weer te geven. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$A_t = 160 \cdot 1{,}007^{t-1}$$

5p **6** □ Bereken na hoeveel maanden de aflossing voor het eerst groter is dan *ƒ* 200,–.

Aan de formule voor A_t is te zien dat er sprake is van een meetkundige rij. Om te berekenen hoeveel er na verloop van tijd *in totaal* is afgelost, moet dus de som van een meetkundige rij bepaald worden.

5p **7** □ Bereken hoe groot het bedrag is dat *in totaal* is afgelost aan het eind van de 60^e maand.

Opgave 3 Geboorte

In de kansrekening gaat men er vaak van uit dat bij een geboorte de kans op een jongen even groot is als de kans op een meisje, namelijk 0,5. In werkelijkheid worden er iets meer jongens geboren dan meisjes. Bij elke geboorte is de kans op een jongen ongeveer 0,51.

Wanneer we bijvoorbeeld de kans willen berekenen dat een gezin met 4 kinderen bestaat uit twee jongens en twee meisjes, dan kunnen we gebruik maken van de bovengenoemde 0,5. Maar we kunnen die kans ook berekenen met behulp van de bovengenoemde 0,51. De twee uitkomsten die we krijgen, zijn niet even groot.

4p **8** □ Bereken hoeveel beide uitkomsten van elkaar verschillen.

Ook bij de Europese vorstenhuizen is de kans dat een jongen wordt geboren, gelijk aan 0,51. Toch zijn er bij de 500 geboortes die de afgelopen eeuwen bij de Europese vorstenhuizen plaatsvonden maar liefst 285 jongens geboren. De kans op zo'n groot aantal jongens is niet zo groot.

4p **9** □ Bereken de kans dat er bij 500 geboortes minstens 285 jongens zijn.

De Nieuw-Zeelandse arts Grant heeft onderzocht of de kans op een jongen, en daarmee dus ook de kans op een meisje, afhangt van persoonlijkheidskenmerken van de moeder. Daartoe deelde zij in eerste instantie een onderzoeksgroep in 3 verschillende categorieën in. De resultaten van dat onderzoek zie je in onderstaande tabel:

tabel 4

categorie:	meegaand	bescheiden	dominant
aantal geboortes:	4073	2048	4018
aantal meisjes:	2767	962	1257

4p **10** □ Bereken in 3 decimalen nauwkeurig voor de *totale* onderzoeksgroep hoe groot de kans is op een jongen.

Bovenstaand onderzoek was voor Grant aanleiding om verder te zoeken. In het vervolgonderzoek deelde zij de moeders in 5 categorieën in: zeer meegaand, meegaand, bescheiden, dominant en zeer dominant. Uit het vervolgonderzoek bleek dat de kans op een meisje bij een zeer meegaande moeder vijf keer zo groot is als de kans op een meisje bij een zeer dominante moeder.

Als de uitkomst van het vervolgonderzoek van Grant juist is, is de kans op een jongen bij een zeer dominante moeder, zo valt na te rekenen, groter dan 0,8. Dat betekent dat deze kans dus zeker niet gelijk kan zijn aan bijvoorbeeld 0,75.

3p **11** □ Laat door een berekening zien dat deze kans inderdaad niet gelijk kan zijn aan 0,75.

Uit de uitkomst van Grants vervolgonderzoek mag je niet de conclusie trekken dat de kans op een jongen bij een zeer dominante moeder vijf keer zo groot is als bij een zeer meegaande moeder.

3p **12** □ Laat met behulp van een getallenvoorbeeld zien dat je die conclusie inderdaad niet mag trekken.

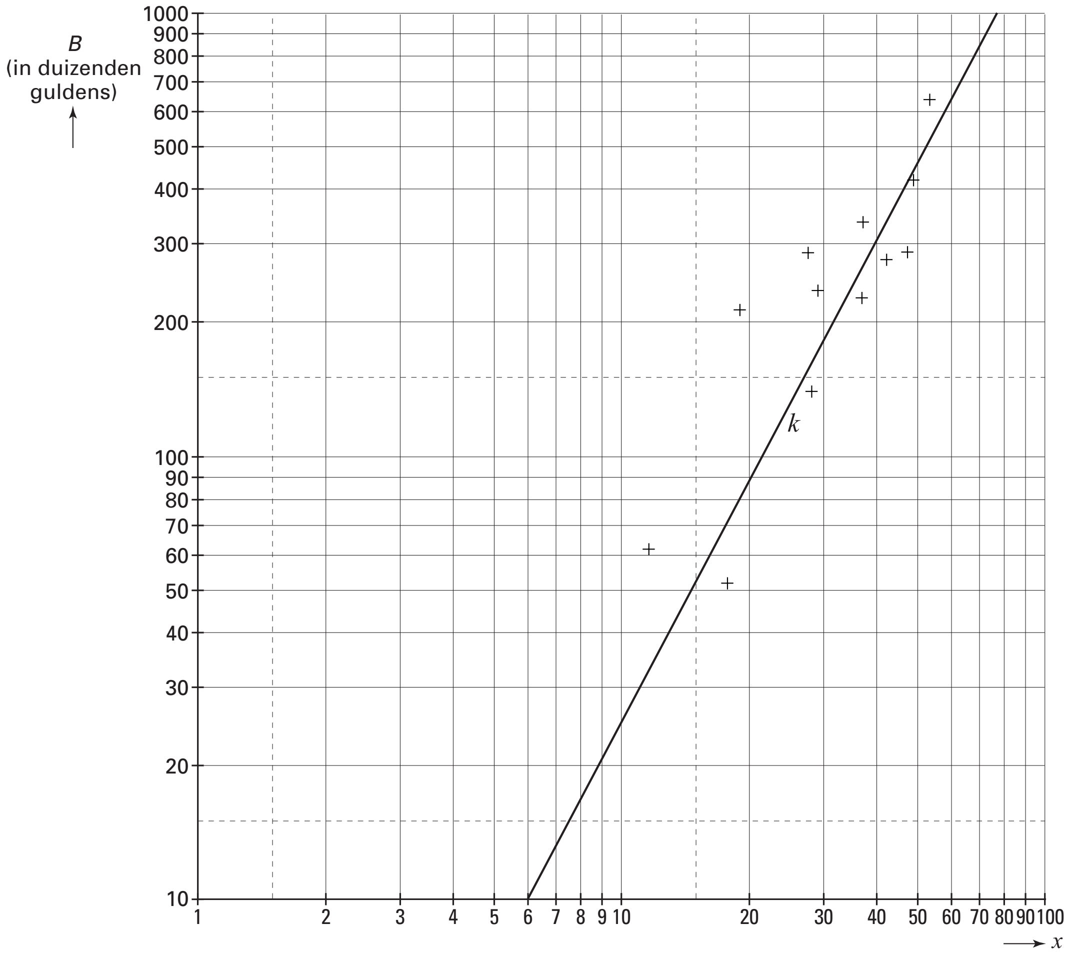
Opgave 4 Kavelkosten

Een gemeente wil uitbreiden door het bouwen van een nieuwe wijk. De plaats waar de nieuwe wijk gebouwd zal worden, is vastgesteld. Voordat de gemeente het uitbreidingsplan laat uitvoeren, doet de gemeente onderzoek naar de kosten van het plan. Er zijn twee soorten kosten voor de gemeente:

- de kosten van aankoop van de grond. In deze situatie bedragen de kosten 170 000 gulden per hectare (1 hectare = 10 000 m^2).
- de kosten van het bouwrijp maken. Dit betreft kosten voor de aanleg van bijvoorbeeld wegen, rioleringen en groenvoorzieningen. Deze kosten zijn hoger naarmate het aantal woningen dat per hectare gebouwd zal worden groter is.

In figuur 3 zijn kosten van diverse vergelijkbare projecten door middel van plusjes weergegeven. Zowel langs de horizontale als langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Hierbij is x het aantal woningen per hectare. B stelt voor de kosten per hectare van het bouwrijp maken in duizenden guldens. Op grond van de plusjes in figuur 3 is een grafiek (de lijn k in figuur 3) getekend die het verband tussen B en x weergeeft. De figuur staat ook op de bijlage afgebeeld.

figuur 3



De lijn k beschrijft een theoretisch model waarmee B kan worden berekend.
De werkelijke kosten bij de onderzochte projecten (de plusjes in de figuur) wijken soms aanzienlijk af van de kosten volgens dit model. Kijk bijvoorbeeld maar naar de kosten van het project dat hoort bij $x \approx 19$.

5p **13** □ Onderzoek of de werkelijke waarde van B van dit project meer dan 100% afwijkt van de waarde van B volgens het model.

Voor $x = 100$ is de waarde van B volgens het model niet in figuur 3 af te lezen.

4p **14** □ Geef voor $x = 100$ een schatting van de waarde van B volgens het model. Maak hierbij gebruik van figuur 3. Licht je werkwijze toe.

Ga er in de rest van de opgave van uit dat $B = 0{,}4 \cdot x^{1{,}8}$.

Neem aan dat de gemeente 30 woningen per hectare wil bouwen.

4p **15** □ Bereken de kosten voor het bouwrijp maken die de gemeente dan per woning zal maken.

De totale kosten per woning die de gemeente maakt, noemen we K. Voor het verband tussen K en x kan de volgende formule worden afgeleid:

$$K = 0{,}4 \cdot x^{0{,}8} + \frac{170}{x}$$

Hierbij is K in duizenden guldens.

2p **16** □ Toon dit aan.

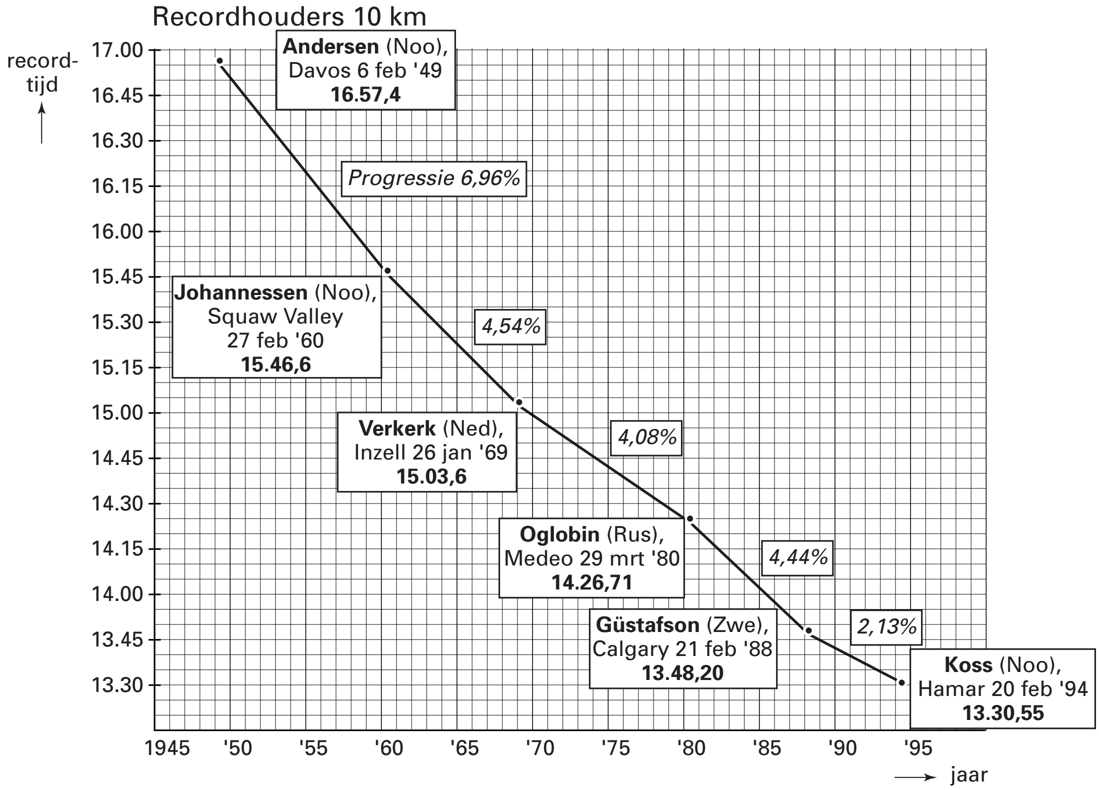
De gemeente wil dat de kavelgrootte (dat wil zeggen de grondoppervlakte) voor alle woningen in de nieuwe wijk hetzelfde is. Bovendien wil men dat de totale kosten die de gemeente per woning maakt, minimaal zijn.

5p **17** □ Onderzoek bij welk aantal woningen per hectare de totale kosten die de gemeente per woning maakt, minimaal zijn.

Opgave 5 Schaatsrecords

Als een schaatsrecord verbeterd wordt, verschijnen in de kranten vaak prachtige grafieken. In figuur 4 is weergegeven hoe de recordtijden op de 10 kilometer voor mannen zich in de loop der jaren ontwikkeld hebben. Voor het overzicht heeft men niet alle in deze periode behaalde wereldrecords vermeld.

figuur 4



Zo zien we dat Koss in 1994 een recordtijd van 13.30,55 reed. Dit houdt in dat deze Noor de 10 kilometer aflegde in 13 minuten en 30,55 seconden.
Tussen twee vermelde records staat steeds met hoeveel procent in die periode de recordtijd gedaald is. We noemen dat de *progressie*.

Nog niet vermeld in deze figuur is de recordtijd die Gianni Romme op 17 februari 1998 reed, namelijk 13.15,33.

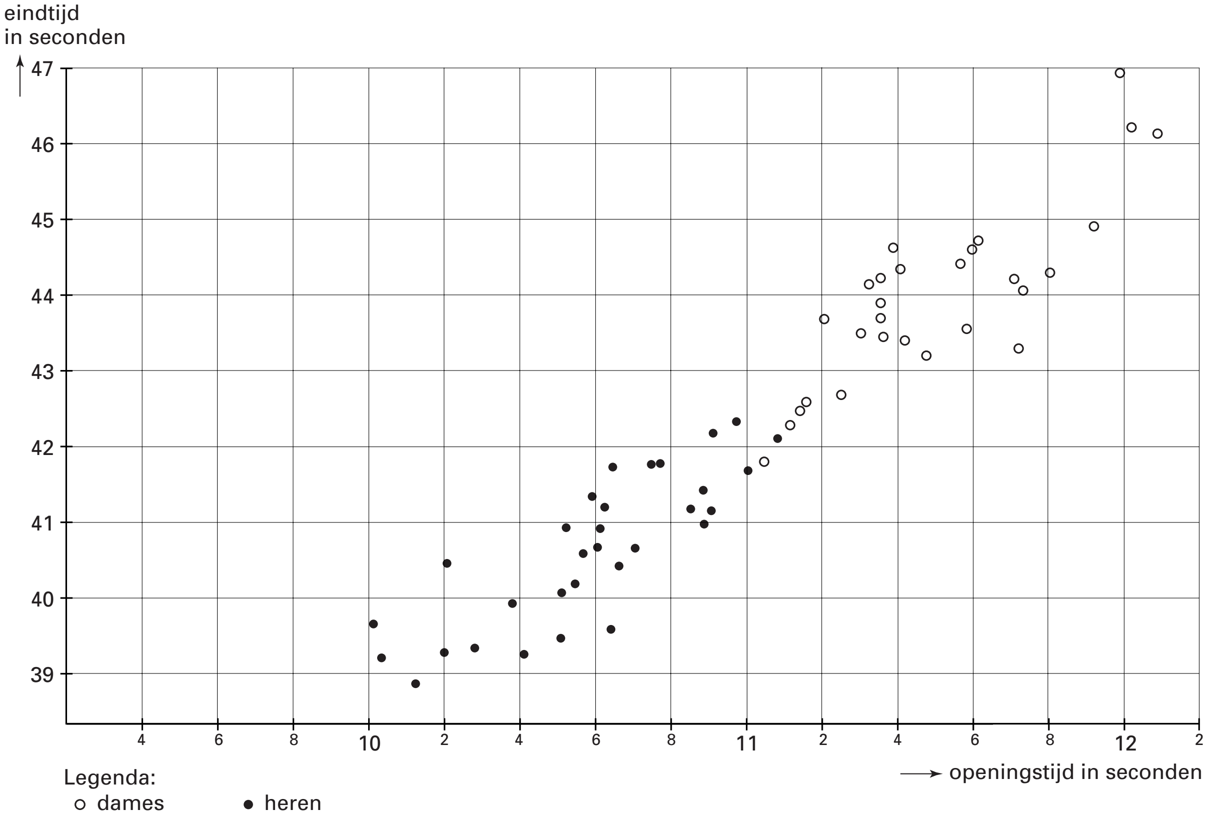
3p **18** □ Laat met een berekening zien dat dit een progressie van 1,88% betekent ten opzichte van het record van Koss uit 1994.

Stel dat dit record van Romme ook in figuur 4 zou staan.

5p **19** □ Onderzoek of de grafiek tussen 1994 en 1998 minder steil zou dalen dan tussen 1969 en 1980.

De volgende grafiek in figuur 5 is afkomstig uit een handboek voor wedstrijdschaatsen. In die grafiek is te zien dat bij wedstrijden op de 500 meter er bij benadering een lineair verband is tussen de tijd over de eerste 100 meter (de openingstijd) en de tijd over de hele rit (de eindtijd). Figuur 5 staat ook op de bijlage.

figuur 5



Een sportcommentator wil een lineaire formule hebben om op grond van de openingstijd een voorspelling van de eindtijd te berekenen. Hij tekent daartoe een rechte lijn in figuur 5 die zo goed mogelijk past bij al deze punten.

5p **20** □ Teken in de figuur op de bijlage een dergelijke lijn en stel de bijbehorende formule op.

Einde