Wiskunde A1 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 01

Tijdvak 1
Donderdag 31 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen; het examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 5 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Begin

Opgave 1 Contradansen

Een Engelse contradans is een muziekstuk dat uit twee delen bestaat. Ieder deel bestaat uit acht maten.
In het boekje „Musik mit Würfeln” staat een systeem beschreven om, zonder enige muzikale kennis, zelf zulke contradansen te maken met behulp van twee dobbelstenen. In dit boekje staan 176 verschillende maten uitgeschreven. Deze maten zijn genummerd van 1 tot en met 176. Ter illustratie zijn in figuur 1 de eerste zes maten afgebeeld.

figuur 1

De getallen 1 tot en met 176 zijn verdeeld over twee even grote tabellen. De tabel die nodig is voor het eerste deel van de contradans is afgebeeld in tabel 1.

tabel 1

De eerste acht maten:

aantal ogen:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
2	70	14	164	122	25	153	18	167
3	10	64	100	12	149	30	161	11
4	33	1	160	163	77	156	168	172
5	36	114	8	35	111	39	137	44
6	105	150	57	71	117	52	132	130
7	165	152	112	15	147	27	73	102
8	7	81	131	37	21	125	49	115
9	142	106	40	69	43	140	23	89
10	99	68	86	139	120	92	143	83
11	85	45	90	158	82	123	78	58
12	145	97	6	121	56	67	63	16

De andere tabel, die nodig is voor het tweede deel van de contradans, zullen we hier niet gebruiken.
Door nu 8 keer met twee zuivere dobbelstenen te gooien, kun je in tabel 1 aflezen uit welke maten het eerste deel van de contradans zal bestaan. Gooi je bijvoorbeeld bij de eerste worp samen 10 ogen, dan lees je in kolom A af dat maat 99 de eerste maat is. Gooi je daarna bijvoorbeeld samen 5 ogen, dan lees je in kolom B af dat maat 114 de tweede maat is. Zo ga je door totdat je uit elk van de kolommen A tot en met H één maat hebt gekozen. De aldus verkregen acht maten vormen het eerste deel van de contradans.

Iemand beweert dat er op deze wijze meer dan 200 miljoen verschillende eerste delen van contradansen gemaakt kunnen worden.

3p **1** □ Onderzoek of deze bewering waar is.

Het is mogelijk dat na drie keer gooien met de beide dobbelstenen de maten 36 – 114 – 8 de eerste drie maten vormen van het eerste deel van een contradans.

4p **2** □ Bereken de kans op deze volgorde.

Iemand beweert dat de kans dat maat H een nummer heeft dat groter is dan 100 gelijk is aan $\frac{5}{11}$. Immers, in de kolom onder H staan 11 getallen, waarvan er 5 groter zijn dan 100.
Met een berekening kunnen we aantonen dat deze bewering niet waar is.

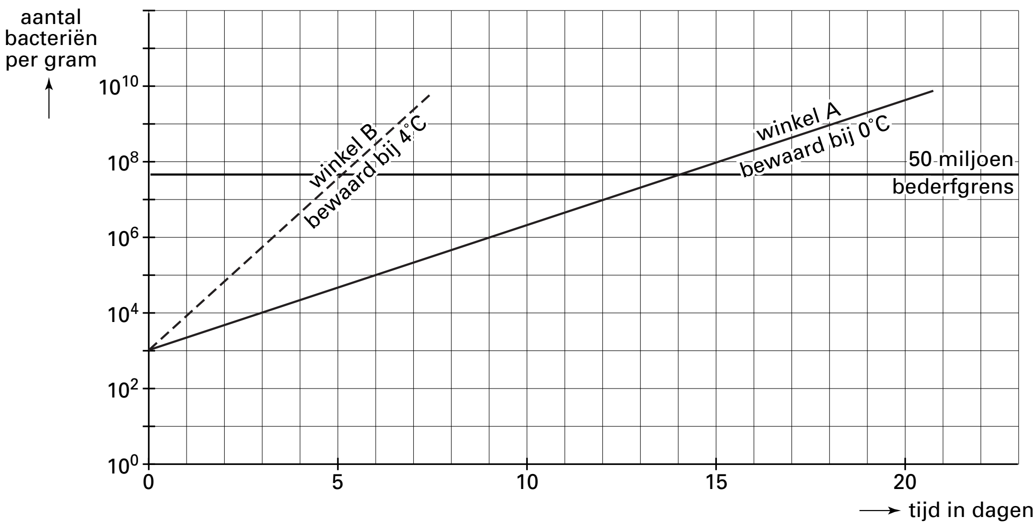
6p **3** □ Bereken hoe groot deze kans wél is.

Opgave 2 Koeling

Wageningse onderzoekers hebben zich verdiept in de groei van het aantal bacteriën in voedsel. Bij constante bewaartemperatuur groeit het aantal bacteriën exponentieel. De bijbehorende groeifactor hangt af van de bewaartemperatuur.
Bij een krantenartikel hierover stond de volgende grafiek. Zie figuur 2. De schaalverdelingen langs de beide assen zijn zo gekozen dat de grafieken, die de groei van het aantal bacteriën weergeven, rechte lijnen zijn.
Deze figuur is ook afgebeeld op de bijlage.

figuur 2

Temperatuursafhankelijkheid van het bederf van kip door pseudomonasbacteriën



In de grafiek wordt de bacteriegroei beschreven in kip die bij 0 °C (winkel A) respectievelijk 4 °C (winkel B) wordt bewaard.

4p **4** □ Toon aan dat bij 0 °C het aantal bacteriën zich per dag meer dan verdubbelt.

In figuur 2 is het aantal bacteriën per gram bij het begin gelijk aan 1000. De bederfgrens ligt bij 50 miljoen bacteriën per gram. In de figuur is af te lezen dat kip die voortdurend op 0 °C wordt bewaard, na 14 dagen de bederfgrens bereikt.

Door verbeterde hygiëne is men in staat het aantal bacteriën bij het begin terug te brengen van 1000 per gram naar 100 per gram. Dit verlengt de houdbaarheid natuurlijk.
Bij bewaren bij 0 °C (winkel A) duurt het dan in totaal 17 dagen voordat de bederfgrens bereikt wordt. De houdbaarheid wordt dus met 3 dagen verlengd.
Bij bewaren bij 4 °C (winkel B) wordt de houdbaarheid door die verbeterde hygiëne met minder dan 3 dagen verlengd. De groeifactor per dag die bij 4 °C hoort, is 8,3.

5p **5** □ Met hoeveel dagen wordt de houdbaarheid bij 4 °C door die verbeterde hygiëne verlengd? Licht je antwoord toe. Je kunt daarbij gebruik maken van de figuur op de bijlage.

In figuur 2 kunnen we zien dat de groeifactor per dag g van het aantal bacteriën afhangt van de bewaartemperatuur. De onderzoekers hebben de volgende formule hiervoor opgesteld:

$$g = 10^{0{,}0092 \cdot (T+6)^2}$$

In deze formule is T de bewaartemperatuur in °C.
Met deze formule kun je dus bij iedere bewaartemperatuur de bijbehorende groeifactor berekenen.

Bij de volgende vraag gaan we uit van kip die buiten de koelkast bij een temperatuur van 18 °C bewaard wordt. Het aantal bacteriën per gram bij het begin is gelijk aan 100. De bederfgrens is nog steeds 50 miljoen bacteriën per gram.

4p **6** □ Onderzoek met een berekening of de bederfgrens binnen één dag bereikt wordt.

Opgave 3 Kwaliteitscontrole

In een fabriek worden plastic zakken gevuld met suiker. De vulmachine staat afgesteld op 510 gram.
Neem aan dat het gewicht van de zakken suiker normaal verdeeld is met een gemiddelde μ van 510 gram en een standaardafwijking σ van 4 gram.

3p **7** □ Bereken hoeveel procent van alle zakken een gewicht minder dan 500 gram zal hebben.

Om de kwaliteit van het vulproces te bewaken, wordt elk uur een aselecte steekproef van 5 zakken suiker genomen. Van elke zak noteert men het gewicht. Ook wordt van de steekproef het totale gewicht T berekend.

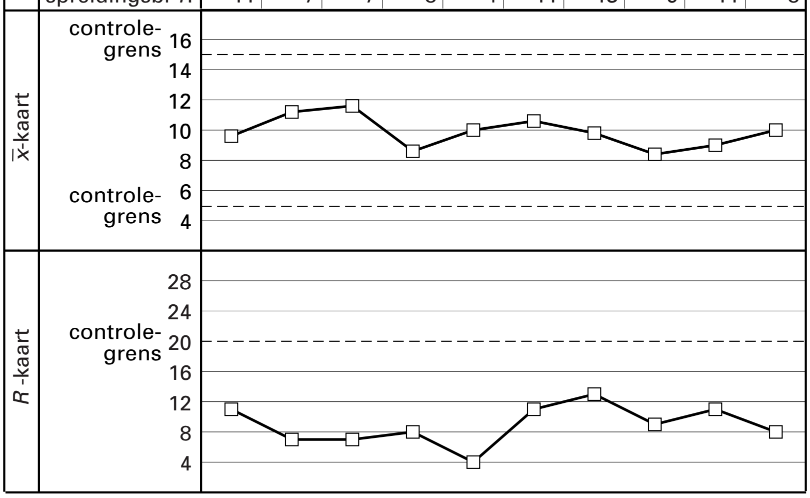
5p **8** □ Bereken de kans dat het totale gewicht van de steekproef minder is dan 2525 gram.

Verder bepaalt men van elke steekproef het gemiddelde gewicht $\bar{x}$ en de spreidingsbreedte R (dat is het verschil tussen de grootste en de kleinste meting).
Men noteert al deze gegevens op een controlekaart, de $\bar{x}/R$-kaart. Op de $\bar{x}/R$-kaart hieronder (zie figuur 3) staan de meetresultaten van 10 steekproeven.
Iedere steekproef bestaat uit 5 zakken. Op de controlekaart worden de afwijkingen van 500 gram bij ieder van deze 5 zakken genoteerd als x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5.
Zo heeft de derde zak van de tweede steekproef een gewicht van 509 gram. Dit is genoteerd als 9.
Het gemiddelde van de eerste steekproef is 509,6 gram. Dit wordt dan genoteerd als 9,6.
De spreidingsbreedte van de eerste steekproef is 515 – 504 = 11 gram.

figuur 3

$\bar{x}/R$-kaart

steekproefnr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	12	8	10	8	11	9	12	2	5	12
x_2	15	12	13	13	12	14	11	11	8	12
x_3	7	9	15	11	8	[illegible]	7	9	7	13
x_4	4	12	12	6	9	[illegible]	16	10	9	8
x_5	10	15	8	5	10	[illegible]	3	10	16	5
totaal T	48	56	58	43	50	53	49	42	45	50
gemiddelde $\bar{x}$	9,6	11,2	11,6	8,6	10	10,6	9,8	8,4	9	10
spreidingsbr R	11	7	7	8	4	11	13	9	11	8



Bij steekproef nummer 6 zijn enkele gegevens onleesbaar geworden.
3p **9** □ Welke getallen kunnen hier bijvoorbeeld gestaan hebben? Licht je antwoord toe.

Bij de controle van het vulproces met behulp van de $\bar{x}/R$-kaart let men erop of $\bar{x}$ of R de zogeheten controlegrenzen overschrijden. Deze controlegrenzen zijn in de grafieken met stippellijnen aangegeven. Zodra bij een steekproef een van deze grenzen overschreden wordt, slaat men alarm.
Op een gegeven moment slaat men alarm bij een steekproef, terwijl met de waarde van $\bar{x}$ niets mis is.

4p **10** □ Wat zouden de vijf gewichten in deze steekproef bijvoorbeeld kunnen zijn? Licht je antwoord toe.

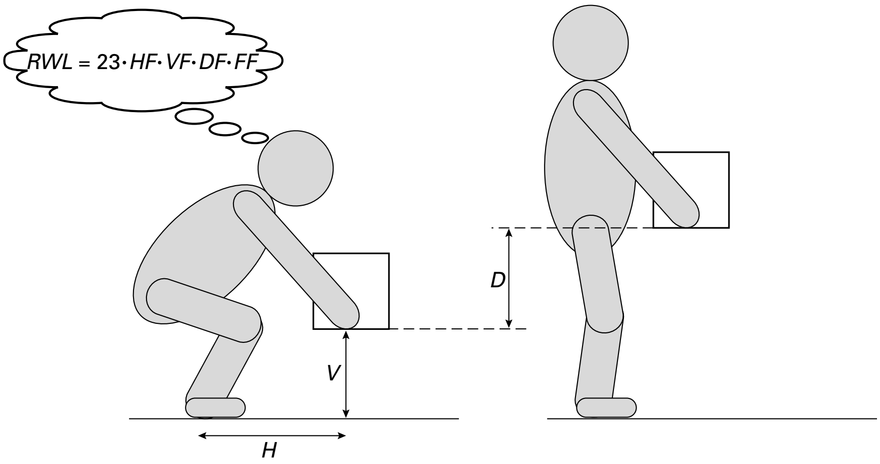
De bij de controles gebruikte zakken legt men in een bak om ze later met de hand in dozen te verpakken. Aan het eind van een dag liggen er 50 zakken in de bak. Daarvan hebben 30 een Nederlandse opdruk en 20 een Arabische opdruk (bestemd voor de export).
Een werknemer zet twee dozen voor zich, een voor de Nederlandse zakken en een voor de Arabische. In elke doos passen 5 zakken. Hij pakt telkens aselect een zak uit de bak en doet die in de goede doos. Zodra hij een doos vol heeft, plakt hij die dicht en neemt hij zo nodig een nieuwe.

4p **11** □ Bereken de kans dat hij na 5 zakken de doos voor de Nederlandse zakken vol heeft. Geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.

Opgave 4 Tillen

Veel rugklachten worden veroorzaakt door het (verkeerd) tillen van zware voorwerpen. Het Amerikaanse National Institute for Occupational Safety and Health (NIOSH) heeft een methode ontwikkeld om voor iedere tilsituatie het aanbevolen maximale tilgewicht *RWL* (Recommended Weight Limit) te bepalen. In figuur 4 is zo'n tilsituatie afgebeeld.

figuur 4



In deze figuur is
H de horizontale afstand in cm van de handen tot de enkels bij het begin van het tillen,
V de verticale afstand in cm van het voorwerp tot de vloer bij het begin van het tillen en
D de verticale afstand in cm waarover het voorwerp moet worden getild.
Verder hangt de tilsituatie af van de *tilfrequentie F*. Dit is het aantal keren per minuut dat een voorwerp wordt getild.

De *RWL* (in kg) wordt berekend door 23 kg te vermenigvuldigen met een aantal reductiefactoren die afhangen van de afstanden *H*, *V* en *D* en van de tilfrequentie *F*.
In een formule:

$$RWL = 23 \cdot HF \cdot VF \cdot DF \cdot FF$$

Hierin zijn *HF*, *VF*, *DF* en *FF* de reductiefactoren.

De reductiefactor *VF* hangt af van de afstand *V* volgens de onderstaande formule:

$$VF = \begin{cases} 1 + 0{,}003 \cdot (V - 75) & \text{voor } 0 \leq V \leq 75 \\ 1 - 0{,}003 \cdot (V - 75) & \text{voor } 75 \leq V \leq 200 \end{cases}$$

3p **12** □ Welke waarde van *V* geeft de grootste waarde van *VF*? Licht je antwoord toe.

De reductiefactoren *HF* en *DF* hangen af van de afstanden *H* en *D* volgens de formules $HF = \frac{25}{H}$ en $DF = 0{,}82 + \frac{4{,}5}{D}$.

De reductiefactoren *HF*, *VF*, *DF* en *FF* zijn allemaal kleiner dan of gelijk aan 1. Als *H* zo klein is dat *HF* volgens bovenstaande formule groter dan 1 zou zijn, wordt de formule voor *HF* niet gebruikt. In dat geval neemt men $HF = 1$.
Hetzelfde geldt voor *DF*: als *D* zo klein is dat *DF* volgens bovenstaande formule groter dan 1 zou zijn, wordt de formule voor *DF* niet gebruikt. In dat geval neemt men $DF = 1$.

3p **13** □ Bereken de kleinste waarde van *D* waarbij de formule voor *DF* nog te gebruiken is.

De reductiefactor *FF* hangt af van de tilfrequentie *F*. Voor het verband tussen *F* en *FF* heeft men geen formule opgesteld. In plaats daarvan maakt men gebruik van de waarden in tabel 2.

tabel 2

frequentie *F* (aantal keren per minuut)	≤ 0,2	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
FF	1,00	0,97	0,94	0,91	0,88	0,84	0,80	0,75	0,70	0,60	0,52	0,45	0,41	0,37

Volgens de NIOSH-methode wordt een tilsituatie *veilig* genoemd als het gewicht (in kg) van het te tillen voorwerp niet groter is dan de *RWL*.
Een werknemer moet vijf keer per minuut een krat van een lopende band in een spoelmachine tillen. Er geldt $H = 40$ cm, $V = 60$ cm en $D = 30$ cm. De kratten wegen 10 kg.

6p **14** □ Onderzoek of dit volgens de NIOSH-methode een veilige tilsituatie is.

Een Arbo-dienst gebruikt voor de bepaling van *FF* in plaats van de tabel de volgende benaderingsformule: $FF = 1 - 0{,}05F$.
De dienst beweert dat de waarden van *FF* volgens deze formule niet meer dan 10% afwijken van de waarden volgens de tabel.

5p **15** □ Onderzoek of deze bewering waar is voor een tilsituatie met $F = 10$.

Opgave 5 Wijnvoorraad

Een wijnboer heeft op 1 januari 2000 een wijngaard gekocht die goed is voor een jaarproductie van 400 hl wijn (1 hl = 1 hectoliter = 100 liter).
De wijnboer wil er kwaliteitswijn produceren die lang houdbaar is. Hoe langer hij de wijn bewaart, hoe meer deze waard wordt.
Als de wijnboer elk jaar direct al zijn wijn verkoopt, dan kan hij niet van deze waardevermeerdering profiteren. Maar als hij al zijn wijn opslaat in zijn wijnkelders, dan raken deze snel vol en heeft de wijnboer voorlopig geen inkomsten.

De wijnboer is van plan om jaarlijks 40% te verkopen van de wijn uit dat jaar en van de wijn die nog over is uit elk voorgaand jaar. De rest voegt hij toe aan de voorraad. De grootte van deze voorraad wordt aan het begin van elk jaar, dus op 1 januari, bepaald.

In tabel 3 kunnen we zien hoe de wijnvoorraad zich gedurende de eerste jaren ontwikkelt.

tabel 3

Voorraad in hl bij verkoop van 40% van de wijn per jaar

geproduceerd in 2000	nieuwe wijn	1-jarige wijn	2-jarige wijn	3-jarige wijn	4-jarige wijn	-- --	-- --	totale voorraad	op 1 januari van het jaar
2001	240	–	–	–	–	--	--	240	2001
2002	240	144	–	–	–	--	--	384	2002
2003	240	144	86,4	–	–	--	--	470,4	2003
2004	240	144	86,4	51,84	–	--	--	522,24	2004
2005	240	144	86,4	51,84	31,104	--	--	553,344	2005
	:	:	:	:	:	--	--	---	---
	:	:	:	:	:	--	--	---	---
	:	:	:	:	:	--	--	---	---

Op 1 januari 2003 is er 240 hl over van de wijn die in 2002 geproduceerd is. Hiervan is, zoals we in de tabel kunnen zien, op 1 januari 2005 nog 86,4 hl in voorraad.
Verder kunnen we zien dat de totale voorraad op 1 januari 2002 bestaat uit 240 hl nieuwe wijn en 144 hl 1-jarige wijn, samen dus 384 hl. De 240 hl is afkomstig van de productie van het jaar 2001 en de 144 hl is afkomstig van de nieuwe wijn uit de voorraad van het jaar 2001.
Alle hoeveelheden wijn in deze tabel, behalve de totale voorraad, kunnen berekend worden met behulp van de volgende formule:

$$\textit{hoeveelheid} = 240 \cdot (0{,}6)^n$$

In deze formule geeft n aan hoeveel jaren oud de wijn is.

5p **16** □ Bereken hoeveel hl wijn van 4 jaar of ouder er in de voorraad zit op 1 januari 2007.

Om de totale voorraad (in hl) te berekenen, kunnen we gebruik maken van de volgende formule:

$$\textit{totale voorraad} = 240 \cdot \frac{1-(0{,}6)^t}{0{,}4}$$

In deze formule is t het aantal jaren na 2000. Met bijvoorbeeld $t = 4$ bedoelen we hier het jaar 2004.
Met behulp van de gegevens uit de tabel kan deze formule eenvoudig gecontroleerd worden voor $t = 1, 2$ en 3. Met behulp van de somformule voor meetkundige rijen kun je aantonen dat deze formule voor iedere waarde van t geldt.

5p **17** □ Toon aan dat deze formule voor iedere waarde van t geldt.

De wijnboer overweegt om niet 40% van de jaarproductie te verkopen, maar een ander percentage.
Veronderstel dat hij jaarlijks p% verkoopt. Ook in dat geval kunnen we met behulp van een formule nagaan hoe groot de totale voorraad (in hl) op 1 januari 2007 zal zijn.
Deze formule ziet er als volgt uit:

$$\textit{voorraad} = \frac{400}{p} \cdot (100-p) \cdot \left[1-(1-\frac{p}{100})^7\right]$$

Als de wijnboer jaarlijks slechts 1% zou verkopen, zou de wijnvoorraad op 1 januari 2007 een aanzienlijk percentage bevatten van alle wijn die gedurende deze 7 jaar geproduceerd is.

4p **18** □ Bereken dit percentage dat hoort bij $p = 1$.

De wijnboer wil het percentage p zo kiezen, dat hij op 1 januari 2007 een totale voorraad van 1100 hl wijn heeft.

4p **19** □ Onderzoek hoe groot hij p moet kiezen.

Einde