Wiskunde A

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 00

Tijdvak 2
Woensdag 21 juni
13.30 – 16.30 uur

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Opgave 1 Overgewicht

Sinds jaren houdt men zich bezig met de vraag of het mogelijk is een relatie aan te geven tussen enerzijds het gewicht en de lengte van volwassen mensen en anderzijds hun gezondheid. In de loop van de tijd zijn er verschillende formules en vuistregels verschenen. Enkele hiervan komen in deze opgave aan de orde.

Vaak maakt men gebruik van de *BMI,* de *Body Mass Index*. De *BMI* ziet er als volgt uit:

$$BMI = \frac{G}{L^2}$$

Hierbij is G het gewicht in kilogram en L de lengte in meter.

Mensen met een *BMI* die ligt tussen 20 en 25 hebben een *acceptabel gewicht*. Daarmee wordt bedoeld dat zij geen extra risico voor bijvoorbeeld hart- en vaatziekten lopen. Een *BMI* van meer dan 25 betekent een verhoogd risico voor hart- en vaatziekten. In die gevallen spreekt men van *overgewicht*.
Een *BMI* van minder dan 20 duidt op *ondergewicht*. Er kan dan sprake zijn van verminderde weerstand door ondervoeding.

4p **1** □ Leg met behulp van de formule uit waarom mensen met een gewicht van 125 kg vrijwel allemaal een verhoogd risico voor hart- en vaatziekten hebben.

In plaats van de *BMI* gebruikt men ook wel eens een eenvoudige vuistregel die aangeeft welk gewicht men het best kan hebben bij een gegeven lengte:
Om het ideale gewicht te bepalen neemt men de lengte in meter, vermenigvuldigt deze met 100 en trekt er daarna 110 van af. Deze uitkomst geeft het ideale gewicht aan in kilogram.

Bij iemand die volgens de vuistregel een ideaal gewicht heeft, kan volgens de *BMI* sprake zijn van ondergewicht.

4p **2** □ Onderzoek of dit het geval is bij iemand met een lengte van 1,58 m door gewicht en bijbehorende *BMI* uit te rekenen.

We willen nagaan of bij iemand die volgens de vuistregel een ideaal gewicht heeft, volgens de *BMI* ook sprake kan zijn van overgewicht.
Voor iemand die volgens de vuistregel een ideaal gewicht heeft, geldt:

$$BMI = \frac{100L - 110}{L^2}$$

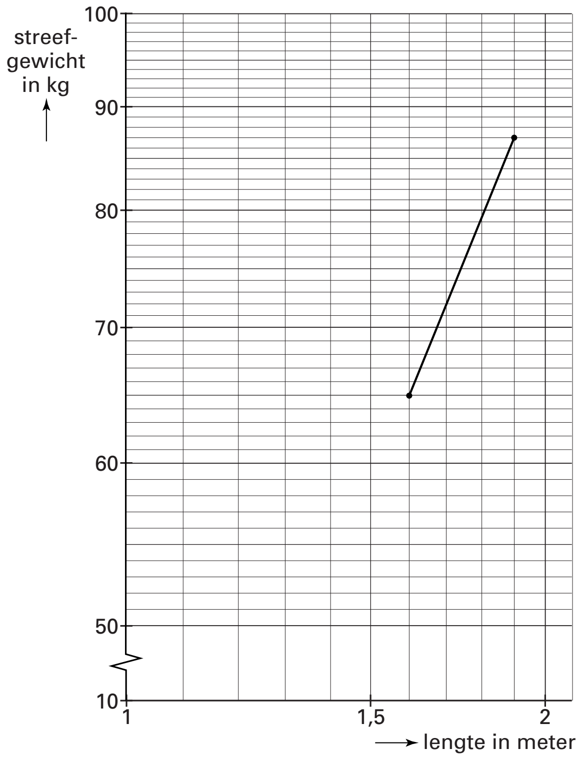
3p **3** □ Leg uit hoe deze formule uit $BMI = \frac{G}{L^2}$ kan worden afgeleid.

Om te onderzoeken of er ook sprake kan zijn van overgewicht bij iemand die volgens de vuistregel een ideaal gewicht heeft, kun je uitrekenen hoe groot de *BMI* van zo iemand maximaal kan zijn.

6p **4** □ Bereken met behulp van differentiëren de grootst mogelijke waarde van de *BMI* van iemand die volgens de vuistregel een ideaal gewicht heeft.

Onderzoekers hebben geprobeerd de BMI-methode te verfijnen. Met behulp van statistische gegevens heeft men bij elke lengte het zogenaamde bijbehorende *streefgewicht* bepaald. Deze gegevens heeft men uitgezet op dubbellogaritmisch papier. Zie figuur 1. Horizontaal staat de lengte in meter. Verticaal is het streefgewicht in kg uitgezet.

figuur 1



Zo heeft iemand met een lengte van 1,60 m een streefgewicht van 65 kg. Iemand van 1,90 m heeft als streefgewicht 87 kg.
De waarden van de *BMI* die horen bij de punten op deze grafiek zijn niet allemaal precies hetzelfde. Daarom pleiten sommige deskundigen ervoor de *BMI* te vervangen door $\frac{G}{L^p}$ met een geschikte waarde van p.

5p **5** □ Bereken p zo dat $\frac{G}{L^p}$ dezelfde waarde heeft voor alle combinaties van lengte en streefgewicht die liggen op de grafiek in figuur 1.

Opgave 2 Geld terug

Michel heeft op 1 juni 1995 een stereo-installatie gekocht met *geld-terug-garantie*. Dit houdt in dat hij na zes jaar, dus op 1 juni 2001, het volledige aankoopbedrag terug kan krijgen van de leverancier. Daarvoor moest hij wel binnen twee weken na aankoop een registratieformulier insturen, en hij moet tussen 1 mei en 1 juni 2001 een aanvraag indienen, vergezeld van de nodige paperassen. Als hij zich niet precies aan deze spelregel houdt, krijgt hij niets. Ook als hij de stereo-installatie heeft doorverkocht, of als hij voor de einddatum is overleden, vervalt het recht op uitbetaling.

In feite betaalt een verzekeringsmaatschappij het aankoopbedrag terug en niet de leverancier van de stereo-installatie.
De leverancier betaalt daarvoor direct na aankoop 20% van het aankoopbedrag aan de verzekeringsmaatschappij. Dit percentage kan zo laag zijn omdat de verzekeringsmaatschappij uitgaat van de volgende veronderstellingen:

- van de kopers valt 20% af omdat ze niet binnen twee weken na aankoop het registratieformulier inzenden;
- elk jaar valt van degenen die nog over zijn 4% af doordat de benodigde papieren zoek raken, de gekochte apparatuur wordt doorverkocht, of de koper overlijdt;
- van degenen die na zes jaar nog over zijn, dient slechts 80% op de voorgeschreven wijze een aanvraag in.

De verzekeringsmaatschappij heeft berekend dat, uitgaande van deze veronderstellingen, ongeveer 50% van de oorspronkelijke kopers uiteindelijk het aankoopbedrag terugkrijgt.

4p **6** □ Toon aan dat dit percentage van 50% juist is.

Bovendien is de verzekeringsmaatschappij in staat al het van de leverancier ontvangen geld gedurende deze zes jaar zeer gunstig te beleggen. Het belegde bedrag groeit met p procent per jaar. Natuurlijk verwacht de verzekeringsmaatschappij winst te maken.

5p **7** □ Bereken hoe groot p dan ten minste moet zijn.

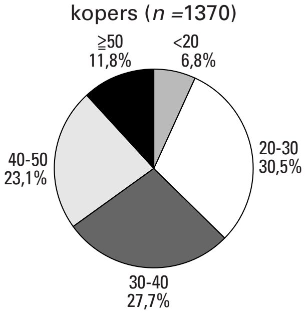
Een Zwitsers elektronicabedrijf wil ook zo'n geld-terug-actie gaan voeren in samenwerking met bovengenoemde verzekeringsmaatschappij. Een marketingdeskundige verwacht dat in Zwitserland een groter percentage dan elders voor uitbetaling in aanmerking zal komen, aangezien veel Zwitsers zeer punctueel zijn. Op korte termijn valt dat af te meten aan het percentage dat binnen twee weken na aankoop het registratieformulier inzendt. Hij beweert dat dit niet 80% zal zijn, zoals in Nederland, maar meer dan 80%.

Men besluit de actie eerst op kleine schaal uit te testen. Van de 1370 hierbij betrokken kopers sturen 1122 binnen twee weken na aankoop het registratieformulier in. Neem aan dat deze 1370 kopers een aselecte steekproef vormen.

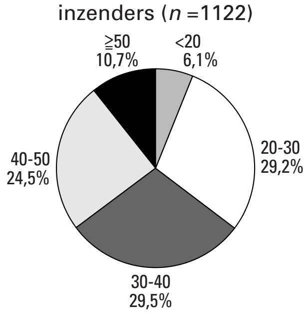
8p **8** □ Onderzoek of men op grond hiervan de bewering van de marketingdeskundige kan aanvaarden, bij een significantieniveau van 5%.

Bij deze testactie heeft men van alle 1370 kopers de leeftijd genoteerd. Die leeftijdsverdeling staat in onderstaande figuur 2a. In figuur 2b staat de leeftijdsverdeling van de 1122 kopers die het registratieformulier op tijd hebben ingestuurd.

figuur 2a



figuur 2b



5p **9** □ Bereken hoeveel procent van de kopers die het registratieformulier *niet* tijdig hebben ingestuurd, 50 jaar of ouder is.

Opgave 3 Eekhoorns

Van 1956 tot en met 1964 hebben de biologen Barkalow, Hamilton en Soots onderzoek gedaan naar eekhoorns in het Umstead State Park in North Carolina. Ze brachten elk jaar bij een aantal pasgeboren eekhoorns een merkteken aan en telden hoeveel van deze eekhoorns in de daaropvolgende jaren nog in leven waren. Zie tabel 1.

tabel 1 Aantallen gemerkte eekhoorns

gemerkt		**in leven in jaar**							
Jaar	Aantal	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964
1956	40	8	4	3	2	0	0	0	0
1957	138		60	30	28	13	9	4	3
1958	229			61	26	12	10	7	3
1959	193				58	26	19	12	9
1960	162					19	13	8	6
1961	99						4	1	1
1962	82							18	6
1963	80								25
totaal		8	64	94	114	70	55	50	53

In 1959, kort voordat de in dat jaar geboren eekhoorns werden gemerkt, waren er 94 gemerkte eekhoorns in leven. Daarvan werden er drie gevangen. Neem aan dat alle eekhoorns dezelfde kans hebben gevangen te worden.

5p **10** □ Bereken de kans dat de drie gevangen eekhoorns in drie verschillende jaren geboren zijn.

Door gegevens van verschillende jaren samen te voegen, berekende men bijvoorbeeld de kans dat een pasgeboren eekhoorn na zes jaar nog in leven is: $\frac{0+4+3}{40+138+229} \approx 0{,}017$.

5p **11** □ Bereken op vergelijkbare manier de kans dat een pasgeboren eekhoorn na vijf jaar nog in leven is.

Tabel 1 heeft betrekking op mannetjes- en vrouwtjeseekhoorns. Bij het opstellen van een biologisch model biedt het voordelen om alleen op vrouwtjeseekhoorns te letten. Met behulp van zo'n model is onderstaande tabel 2 opgesteld. Deze tabel laat de ontwikkeling zien van een denkbeeldige groep van 1000 vrouwtjeseekhoorns. Natuurlijk hoeven de feitelijke waarnemingen uit tabel 1 niet precies overeen te komen met dit theoretische model.

tabel 2 Aantal vrouwtjeseekhoorns dat een bepaalde leeftijd bereikt, uitgaande van 1000 pasgeboren vrouwtjeseekhoorns (theoretisch model)

leeftijd (jaar)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Uit tabel 2 is bijvoorbeeld af te leiden dat 31 vrouwtjeseekhoorns in het vierde jaar doodgaan. We nemen aan dat deze 31 gemiddeld 3,5 jaar oud worden. Net zo nemen we aan dat de vrouwtjeseekhoorns die in het derde jaar doodgaan gemiddeld 2,5 jaar oud worden. Enzovoort.

5p **12** □ Bereken de gemiddelde levensduur van de vrouwtjeseekhoorns.

In tabel 3 staan de in het model gebruikte vruchtbaarheidscijfers. Ook deze hebben alleen betrekking op vrouwtjeseekhoorns. Het getal 1,28 bijvoorbeeld betekent dat alle vrouwtjeseekhoorns die de leeftijd van één jaar bereiken, in het daaropvolgende jaar gemiddeld 1,28 dochters krijgen. Zoals je ziet krijgen sommige eekhoorns al in hun eerste jaar jongen.

tabel 3 Gemiddeld aantal in een jaar geboren dochters per vrouwtjeseekhoorn

leeftijd (jaar)	0	1	2	3	4	5	6	7
aantal dochters	0,05	1,28	2,28	2,28	2,28	2,28	2,28	2,28

De *vervangingsfactor R* geeft aan hoeveel dochters een pasgeboren vrouwtjeseekhoorn in haar hele leven naar verwachting ter wereld zal brengen. Omdat de vruchtbaarheidscijfers niet voor alle leeftijden hetzelfde zijn, kun je niet de gemiddelde levensduur uit vraag 12 gebruiken om snel R te berekenen.

5p **13** □ Laat met een berekening zien dat hier geldt: $R \approx 1{,}17$.

Ruwweg gezegd is de betekenis van R: elke generatie is R keer zo groot als de vorige generatie. R is dus de groeifactor met als tijdseenheid de *gemiddelde generatieduur T*. Voor T nemen we de gemiddelde leeftijd van de moeder bij de geboorte van een dochter. Uit de tabellen 2 en 3 is af te leiden dat $T \approx 3{,}2$ jaar.

4p **14** □ Bereken in hoeveel jaar het aantal vrouwtjeseekhoorns zich verdubbelt.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Opgave 4 Konijnenvoer

Mengvoerbedrijf MVB produceert en verkoopt onder andere konijnenvoer. De huidige voorraad konijnenvoer bedraagt slechts 10 ton (1 ton = 1000 kg). MVB vindt dit te weinig, maar is op dit moment niet in staat om zelf extra konijnenvoer te produceren. Het bedrijf wil daarom konijnenvoer van andere bedrijven inkopen en dat mengen met de eigen voorraad. Een bedrijf uit Leiden en een bedrijf uit Utrecht bieden konijnenvoer te koop aan.

Konijnenvoer bestaat uit alfalfa (ontkiemde zaadjes van de luzerne), graankorrels (bijvoorbeeld haver, maïs) en peulvruchten (bijvoorbeeld erwten, sojabonen). Verder worden vitaminen, mineralen en kleurstoffen toegevoegd.
In tabel 4 staan enkele gegevens over de samenstelling van het konijnenvoer van de drie bedrijven.

tabel 4

	voer van MVB	voer uit Leiden	voer uit Utrecht
gehalte vitamine A (in IE/kg)	8500	4500	10 000
percentage alfalfa	30	40	44
percentage kleurstof	0,30	0,25	0,45

(IE = Internationale Eenheden)

Neem voor de volgende vraag aan dat MVB de eigen voorraad konijnenvoer van 10 ton mengt met 15 ton voer uit Leiden en 10 ton voer uit Utrecht.

3p **15** □ Bereken het percentage alfalfa van het zo ontstane mengsel.

MVB stelt de volgende eisen aan het mengsel:
- het gehalte vitamine A moet ten minste gelijk zijn aan 7500 IE/kg;
- het percentage alfalfa mag ten hoogste gelijk zijn aan 36;
- het percentage kleurstof mag ten hoogste gelijk zijn aan 0,35.

Stel dat MVB de eigen voorraad van 10 ton konijnenvoer mengt met x ton voer uit Leiden en y ton voer uit Utrecht.
Uit de eisen die MVB stelt aan het mengsel volgen beperkende voorwaarden voor x en y. Deze voorwaarden staan hieronder in een willekeurige volgorde.

$-x + y \leqq 5 \qquad x + 2y \leqq 15 \qquad 6x - 5y \leqq 20$

5p **16** □ Welke van deze drie voorwaarden volgt uit de eis die MVB stelt aan het gehalte vitamine A in het mengsel? Licht je antwoord toe.

5p **17** □ Teken het toegestane gebied.

MVB wil zijn voorraad uitbreiden tot 22,5 ton door de eigen voorraad van 10 ton te mengen met voer van de bedrijven uit Leiden en Utrecht. Tegelijkertijd moet het mengsel aan de eerder genoemde eisen voldoen.

4p **18** □ Laat zien dat dit niet mogelijk is.

Op het laatste moment komt er een fax binnen. Het bedrijf uit Leiden meldt dat men een fout gemaakt heeft bij de bepaling van het gehalte vitamine A. Dit is hoger dan de eerder vermelde 4500 IE/kg. De percentages alfalfa en kleurstof zijn wel juist. Op grond van deze nieuwe informatie besluit MVB zijn voorraad uit te breiden tot 22,5 ton door de eigen voorraad van 10 ton te mengen met 10 ton uit Leiden en 2,5 ton uit Utrecht. Het hierdoor verkregen mengsel voldoet aan de gestelde eisen.

5p **19** □ Bereken hoe groot het gehalte vitamine A (in IE/kg) van het voer uit Leiden ten minste is.

Einde