Wiskunde A

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 00

Tijdvak 1
Woensdag 17 mei
13.30 – 16.30 uur

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 14, 15 en 17 is een bijlage toegevoegd.

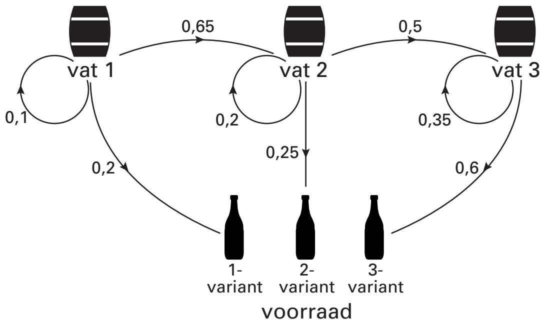
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Opgave 1 Bierbrouwen

Brouwerij De Pint heeft een nieuwe biersoort ontwikkeld: het 1-2-3-bier. De brouwerij is van plan om van dit bier drie varianten op de markt te brengen: de 1-variant, de 2-variant en de 3-variant. De naam van elk van deze varianten heeft alles te maken met het rijpingsproces van het bier. De 1-variant is na een maand rijpen gereed voor consumptie, de 2-variant na twee maanden en de 3-variant na drie maanden.
Het rijpingsproces vindt plaats in verschillende vaten: vat 1, vat 2 en vat 3. Elke maand wordt een deel van de inhoud van vat 1, vat 2 en vat 3 in flesjes van respectievelijk 1-variant, 2-variant en 3-variant gepompt. En bij vat 1 en vat 2 wordt ook een deel overgepompt naar het volgende vat voor verdere rijping. Bij het pompen gaat steeds een deel verloren. Zie figuur 1.

figuur 1



Zo zien we bijvoorbeeld dat iedere maand 20% van de inhoud van vat 2 achterblijft in vat 2 en 50% wordt overgepompt naar vat 3.
Dit proces levert dus elke maand een aantal flesjes op van de 1-variant, de 2-variant en de 3-variant. Deze flesjes komen in de voorraad.

Uit elk vat gaat elke maand 5% van de inhoud van het vat verloren.

3p **1** □ Laat voor elk vat zien hoe je dit percentage met behulp van de gegevens uit figuur 1 kunt berekenen.

Eens per maand wordt bier van alle drie de vaten in de flesjes gepompt. Direct daarna wordt bier van vat 2 naar vat 3 overgepompt en vervolgens van vat 1 naar vat 2. Tenslotte wordt vat 1 aangevuld tot 8000 liter. Na drie maanden is daarmee de productie van alle varianten op gang gekomen.
Op het moment dat de brouwerij start met de productie van het 1-2-3-bier zijn alle vaten leeg en wordt 8000 liter bier in vat 1 gepompt. De overgangsgetallen uit figuur 1 worden vanaf het begin van de productie gebruikt.

Ruim twee maanden na het begin van de productie, dus na twee keer overpompen, is er nog geen bier verkocht. Alle gevulde flesjes bevinden zich nog in de voorraad.

6p **2** □ Bereken van elke variant hoeveel liter bier er op dat moment in flesjes zit.

Van de 8000 liter bier die bij het begin van de productie in vat 1 is gepompt, is na een maand een deel in vat 1 achtergebleven. Na twee maanden wordt alsnog een gedeelte hiervan overgepompt. Enzovoort. Na drie maanden, dus na drie keer overpompen, is in alle drie de vaten nog een deel van deze 8000 liter aanwezig. Ook is er een deel in de flesjes terecht gekomen. Er is echter door het pompen ook een gedeelte verloren gegaan.

7p **3** □ Bereken hoeveel procent er van deze 8000 liter verloren is gegaan.

Na een aantal maanden is het brouwproces stationair, dat wil zeggen dat de hoeveelheden bier in de vaten niet veranderen. In die situatie zit in vat 1 elke maand 8000 liter.

6p **4** □ Bereken de hoeveelheden die dan elke maand in vat 2 en in vat 3 zitten.

Om de verkoop van flesjes bier te bevorderen houdt de brouwerij een actie. Aan de binnenkant van de dop van elk flesje wordt één van de letters D, E, I, N, P of T gedrukt. Deze letters worden pas zichtbaar wanneer de flesjes worden geopend.
De letters D, E en I komen elk bij 25% van de flesjes voor, de letters N en P elk bij 10% en de letter T bij 5%. Neem aan dat de letters willekeurig over de voorraad flesjes verdeeld zijn.
Iedereen die met zes doppen de woorden DE PINT kan maken, krijgt van de brouwerij een tegoedbon.
Iemand koopt 6 flesjes bier.

5p **5** □ Bereken de kans dat hij met de doppen ervan een tegoedbon krijgt.

Opgave 2 Geboortegewicht

Bij een onderzoek in de VS rond de volksgezondheid werd het gewicht van mannelijke baby's bij de geboorte geregistreerd. Dit geboortegewicht bleek normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 3592 gram en een standaardafwijking van 96 gram.

3p **6** □ Toon aan dat ruim 32% van deze baby's minder dan 3548 gram weegt.

4p **7** □ Bereken de kans dat van 10 willekeurig uit deze baby's gekozen jongetjes er precies 4 bij de geboorte minder dan 3548 gram wegen.

Lange tijd werd aangenomen dat ook voor de Nederlandse situatie diezelfde normale verdeling met gemiddelde 3592 gram en standaardafwijking 96 gram gold.
Een Nederlandse onderzoeker is echter van mening dat het gemiddelde geboortegewicht bij mannelijke baby's in Nederland hoger ligt dan de eerder genoemde 3592 gram. Van een aselecte steekproef van 200 Nederlandse jongetjes is het gemiddelde geboortegewicht gelijk aan 3605 gram.

7p **8** □ Onderzoek of dit steekproefresultaat voldoende aanleiding geeft deze onderzoeker gelijk te geven. Neem als significantieniveau $\alpha = 0{,}05$.

In een ander onderzoek werd niet alleen gekeken naar het geboortegewicht maar ook naar het gewicht van baby's op 1-jarige leeftijd. Het resultaat van dit onderzoek staat in tabel 1 hieronder vermeld.

tabel 1

		gewicht na 1 jaar (in kilogrammen)						
		8 – 9	9 – 10	10 – 11	11 – 12	12 – 13	13 – 14	totaal
geboortegewicht (in kilogrammen)	2 – 3	8	40	66	38	11	0	163
	3 – 4	3	16	64	93	70	7	253
	4 – 5	2	7	49	60	72	32	222
	totaal	13	63	179	191	153	39	638

Uit tabel 1 kunnen we bijvoorbeeld aflezen dat er bij dit onderzoek 7 baby's waren van wie het geboortegewicht tussen 4 en 5 kilogram lag en het gewicht na 1 jaar tussen 9 en 10 kilogram.

5p **9** □ Onderzoek met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier of het 'gewicht na 1 jaar' bij benadering normaal verdeeld is.

Het gewicht van een baby na 1 jaar is mede afhankelijk van zijn geboortegewicht. Als we er van uitgaan dat deze tabel representatief is voor alle baby's dan kunnen we die afhankelijkheid met behulp van tabel 1 laten zien. Daarvoor kijken we naar de kans dat een baby na 1 jaar tussen 8 en 10 kilogram weegt.

5p **10** □ Toon aan dat deze kans voor een baby met een geboortegewicht tussen 2 en 3 kilogram meer dan 7 keer zo groot is als voor een baby met een geboortegewicht tussen 4 en 5 kilogram.

Opgave 3 Hoog water

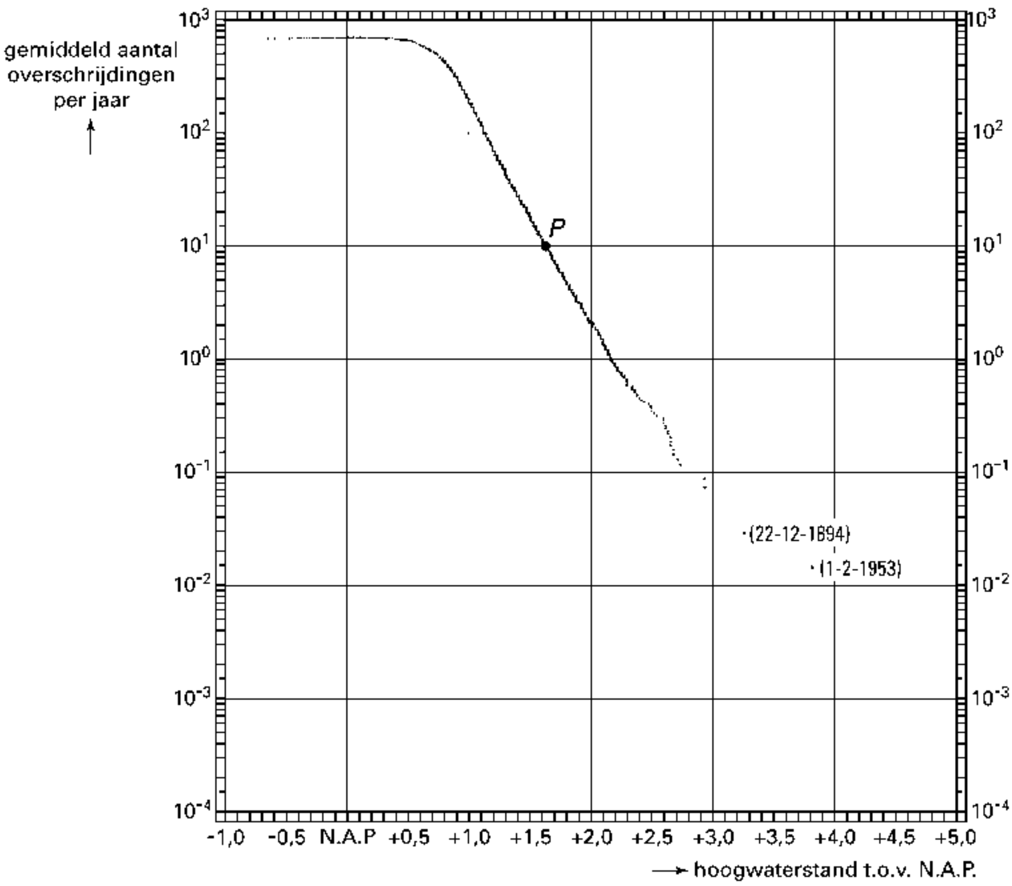
Een groot deel van Zuidwest-Nederland moet door dijken tegen de zee worden beschermd. Tot in de jaren veertig liet men zich bij het bepalen van de vereiste hoogte van een dijk leiden door de hoogste waargenomen waterstand tot dan toe, in de verwachting dat het water nooit hoger zou komen. De watersnoodramp van 1953 heeft laten zien hoe funest deze benadering was. Het water kwam toen zo hoog dat grote delen van Zuidwest-Nederland overstroomden. Meer dan 1800 mensen verdronken. De kort daarna ingestelde Deltacommissie moest onder andere een antwoord zien te vinden op de vraag welke dijkhoogte voldoende veiligheid zou bieden. Het Mathematisch Centrum te Amsterdam kreeg de opdracht een statistisch onderzoek uit te voeren.
In Hoek van Holland waren sinds 1 januari 1888 alle hoogwaterstanden geregistreerd. Ten tijde van het onderzoek kon men beschikken over deze hoogwaterstanden tot en met 31 december 1956.

Een hoogwaterstand is de hoogste waterstand gedurende een eb-en-vloed-periode. Zo'n periode duurt 12 uur en 25 minuten.

5p **11** □ Bereken hoe vaak er een hoogwaterstand in de periode van 1888 tot en met 1956 in Hoek van Holland geregistreerd is. Ga uit van jaren van gemiddeld 365,25 dagen.

Met behulp van deze hoogwaterstanden is figuur 2 gemaakt. Deze figuur staat ook vergroot op de bijlage. Op de horizontale as staat de waterhoogte in meter ten opzichte van N.A.P. Op de verticale as staat op een logaritmische schaal het gemiddelde aantal keren per jaar dat deze waterhoogte bereikt of overschreden wordt, kortweg het aantal overschrijdingen genoemd. Zo is bijvoorbeeld bij punt *P* te zien dat in deze periode het water gemiddeld 10 keer per jaar een hoogte heeft bereikt van 1,65 meter boven N.A.P. of hoger.

figuur 2



De op een na hoogste waterstand in de onderzochte periode werd gemeten op 22 december 1894.

3p **12** □ Verklaar waarom het bijbehorende punt is getekend bij een gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van ongeveer 0,03.

Met behulp van figuur 2 is berekend hoe groot de kans is dat een hoogwaterstand van 2,5 meter of meer wordt bereikt. Voor elke eb-en-vloed-periode is deze kans ongeveer gelijk aan 0,0006.

5p **13** □ Bereken de kans dat in een jaar met 365 dagen ten minste 1 keer een hoogwaterstand van 2,5 meter of meer voorkomt.

Tussen 1 meter en ruim 2 meter boven N.A.P. liggen de getekende punten vrijwel op een rechte lijn. Door deze lijn te trekken krijgen we een model voor het verband tussen de waterhoogte en het gemiddelde aantal keren per jaar dat deze hoogte bereikt of overschreden wordt.

Rechtsonder in de figuur wijken de getekende punten nogal van deze lijn af, maar dat is te verklaren doordat daar weinig waarnemingen zijn. Voor de afwijkingen linksboven in de figuur ligt dat anders. De punten die horen bij waterhoogten tot ongeveer 0,5 meter boven N.A.P. kunnen onmogelijk op de hierboven genoemde lijn liggen.

3p **14** □ Verklaar waarom dat onmogelijk is. Je mag hierbij de figuur op de bijlage gebruiken.

Het hierboven genoemde model heeft betrekking op de lijn door de punten die horen bij alle hoogwaterstanden tussen 1 meter boven N.A.P. en ruim 2 meter boven N.A.P. Voor extreme hoogwaterstanden bleek dit model sterk verbeterd te kunnen worden. Dit verbeterde model leidde tot de formule:

$$f = 408 \cdot 0{,}0513^{h}$$

Hierbij is h de waterhoogte in meter boven N.A.P. en f het gemiddelde aantal keren per jaar dat deze hoogte bereikt of overschreden wordt.

Bij de watersnoodramp van 1953 kwam het water 3,85 meter boven N.A.P. Volgens het verbeterde model is te verwachten dat gemiddeld één keer in de 227 jaar het water deze hoogte bereikt of overschrijdt.

De Deltacommissie adviseerde de dijken zo hoog te maken dat deze dijkhoogte gemiddeld slechts één keer per 10 000 jaar bereikt of overschreden zou worden. De hiertoe benodigde dijkhoogte kan met het eerstgenoemde model worden bepaald, maar ook met het verbeterde model.

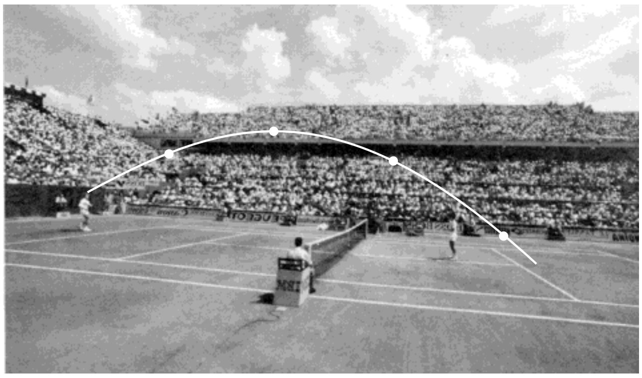
6p **15** □ Onderzoek hoe groot het verschil tussen de zo gevonden dijkhoogten is. Je mag hierbij de figuur op de bijlage gebruiken.

Opgave 4 De service

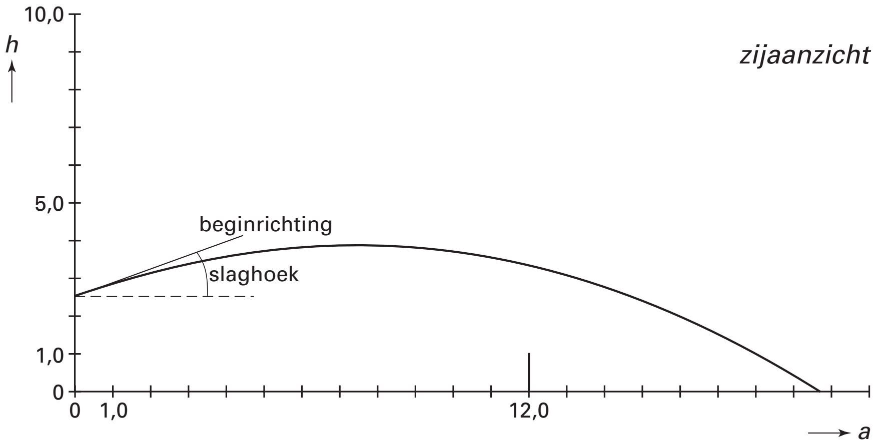
Bij sporten als volleybal en tennis is de service erg belangrijk, dat wil zeggen de manier waarop de bal in het spel gebracht wordt. We bekijken hier de service bij tennis.

De speler staat bij het serveren 12 meter van het net. Het net is 1 meter hoog. We nemen aan dat de speler de bal raakt op een hoogte van 2,5 meter boven de grond en ter vereenvoudiging gaan we er van uit dat de speler de bal precies in de lengterichting van het veld slaat.
Op de foto en in figuur 3 zie je een mogelijke baan van de bal.

foto



figuur 3



De hoogte van de onderkant van de bal in meter ten opzichte van de grond noemen we *h.* De horizontale afstand in meter noemen we *a.* Het verband tussen *a* en *h* hangt af van de snelheid waarmee de bal geslagen wordt en van de beginrichting. Deze beginrichting wordt bepaald door de *slaghoek*. Dit is de hoek waaronder de bal geslagen wordt. Zie figuur 3.

Ga er in vraag 16 van uit dat de bal onder een hoek van 15º geslagen wordt met een snelheid van *v* m/s. Bij deze hoek geldt bij benadering het volgende verband tussen *a* en *h*:

$$h = -\frac{5,36}{v^2} \cdot a^2 + 0,27 \cdot a + 2,50$$

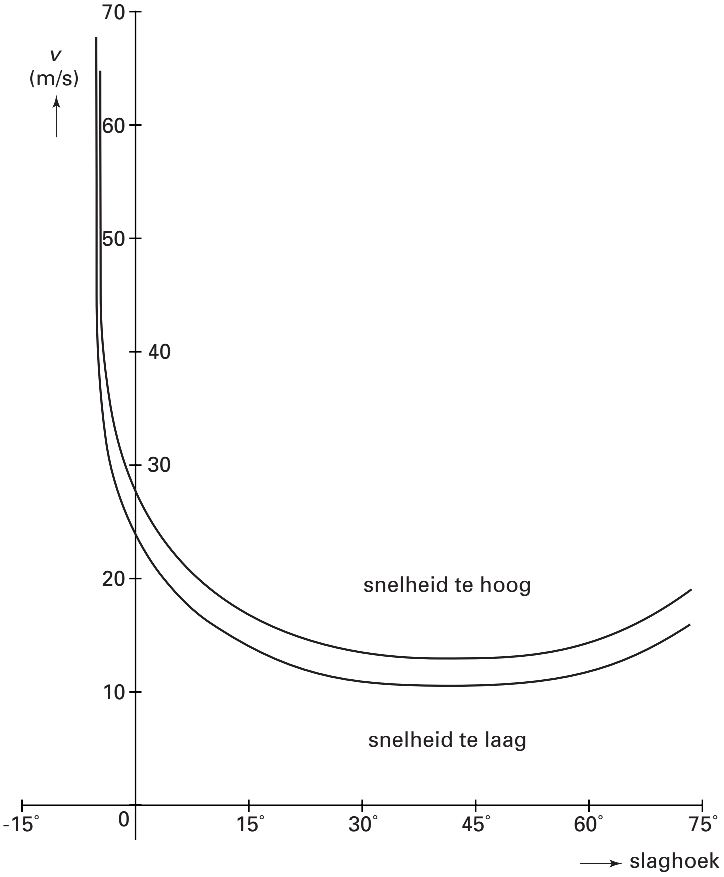
Een speler slaat de bal met een snelheid van 17 m/s.

5p **16** □ Bereken de grootste hoogte boven de grond die deze bal bereikt.

In deze vereenvoudigde situatie spreken we van een *geldige service* als
- de speler die serveert 12 meter van het net staat;
- de bal precies in de lengterichting van het veld geslagen wordt;
- de bal over het net gaat zonder dit te raken én
- de bal neerkomt op een afstand van ten hoogste 7 meter voorbij het net.

In een artikel over dit onderwerp stond de volgende grafiek. In deze figuur 4 heeft men weergegeven bij welke combinaties van slaghoek en snelheid een geldige service verkregen wordt. Een speler die de bal slaat onder een hoek van 30º moet, volgens figuur 4, de bal slaan met een snelheid van ongeveer 11 tot 13 m/s. Slaat hij te zacht dan komt de bal niet over het net. Slaat hij te hard dan komt de bal te ver voorbij het net op de grond. Figuur 4 staat ook op de bijlage.

figuur 4



Een profspeler slaat bij een geldige service de bal met een snelheid van 150 km/uur.

4p **17** □ Teken in de onderste figuur op de bijlage de beginrichting van een mogelijke baan van deze bal. Licht je antwoord toe met behulp van figuur 4.

Neem in vraag 18 en 19 aan dat de bal onder een hoek van 10º geslagen wordt. Bij deze hoek geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen *a* en *h*:

$$h = -\frac{5{,}16}{v^2} \cdot a^2 + 0{,}18 \cdot a + 2{,}50$$

Voor een geldige service moet de bal over het net gaan zonder dit te raken. De snelheid is te laag als in bovenstaande formule bij afstand $a = 12$ de hoogte $h \leqq 1$ is. Volgens figuur 4 is een snelheid van 16 m/s of minder te laag voor een geldige service. Echter, met behulp van een berekening is na te gaan dat de figuur hier erg onnauwkeurig is getekend.

6p **18** □ Welke snelheden (in m/s) zijn volgens de formule te laag voor een geldige service? Geef je antwoord in ten minste 1 decimaal nauwkeurig. Licht je antwoord toe met een berekening.

Voor een geldige service moet de bal bovendien ten hoogste 7 meter voorbij het net de grond raken. Uit deze eis volgt ook een voorwaarde voor *v*.

2p **19** □ Welke getallen moet je in bovenstaande formule invullen om deze voorwaarde te krijgen? Licht je antwoord toe.

Einde