Eindexamen wiskunde A vwo 1999-II

Opgave 1 Wielrennen

Bij wielrennen gaat het er meestal om in een zo kort mogelijke tijd een gegeven afstand af te leggen. Daarnaast kent men het wereld-uurrecord. Daarbij gaat het erom in precies één uur een zo groot mogelijke afstand af te leggen.
Op 2 september 1994 reed Miguel Indurain op de wielerbaan van Bordeaux in één uur 53,040 km. Hij vestigde daarmee het wereld-uurrecord. Kort daarna raakte hij zijn record kwijt aan Toni Rominger, die op 5 november 1994 op dezelfde baan in één uur 55,291 km reed.

De afgelegde afstand bestaat uit een groot aantal rondes op de wielerbaan. Elke ronde is 250 meter.

Stel dat Indurain en Rominger deze ritten tegelijkertijd hadden gereden, en naast elkaar waren gestart en dat ieder met constante snelheid reed.

4p **1** □ Hoeveel keer zou Rominger na de start in de loop van het uur Indurain hebben ingehaald? Licht je antwoord toe.

Om te voorspellen of een wielrenner een bepaalde snelheid kan halen, kijkt men naar het daarvoor benodigde *vermogen* (W), dat is de energie die de wielrenner per seconde moet leveren. Daarbij speelt de *luchtweerstand* een belangrijke rol. De luchtweerstand kan onder andere verkleind worden door de stroomlijn van fietser en fiets te verbeteren.
Men gebruikt vaak de volgende formule voor W:

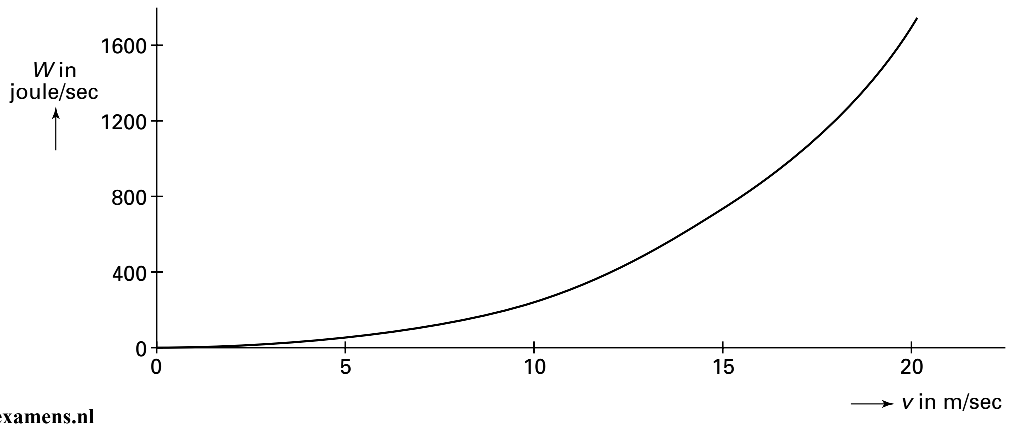
$$W = (k \cdot v^2 + 4) \cdot v$$

Hierbij geldt:
- v is de snelheid (in m/sec);
- W is het *vermogen* (in joule/sec) dat de wielrenner moet leveren;
- k is een getal dat onder andere te maken heeft met de luchtweerstand.

Daan wil zich op de wielersport gaan toeleggen. Van een medische keuring weet hij dat hij gedurende enige tijd een vermogen kan leveren van 190 joule/sec. Op zijn huidige fiets haalt hij een snelheid van 33 km/uur, dus ruim 9 m/sec. Met behulp van bovenstaande formule leidt hij hieruit af dat $k = 0,2$.

Door veel te trainen hoopt Daan een vermogen te kunnen leveren van 300 joule/sec. Om er achter te komen wat de maximale snelheid is die hij dan kan halen, tekent hij voor $k = 0,2$ de grafiek van W als functie van v. Zie figuur 1. Hij kan nu aflezen dat zijn maximale snelheid dan bijna 11 m/sec zal zijn (ongeveer 39 km/uur).

figuur 1



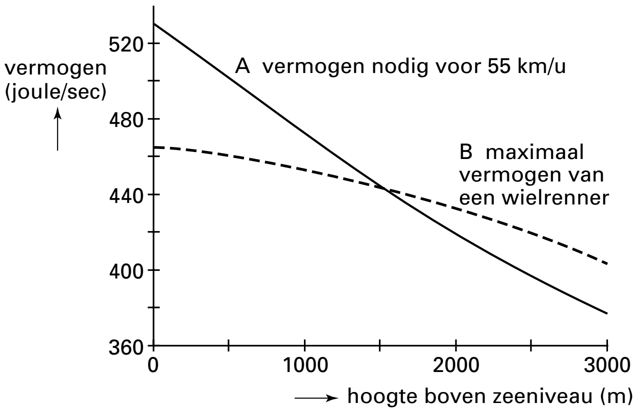
Daan is ook van plan een nieuwe fiets en nieuwe fietskleding te kopen. Volgens kenners kan hij daarmee k verlagen tot $k = 0{,}15$. Daan vraagt zich af welke snelheid hij dan kan behalen. Om de vraag te kunnen beantwoorden, moet hij een nieuwe grafiek tekenen.

5p **2** □ Welke snelheid (in km/uur) zal Daan kunnen behalen met een vermogen van 300 joule/sec, bij $k = 0{,}15$? Licht je antwoord toe met behulp van een grafiek.

De wielerbaan van Bordeaux ligt op zeeniveau.
Voordat Indurain en Rominger hun eerder genoemde recordritten reden, beweerde iemand dat de magische grens van 55 kilometer in één uur slechts op grote hoogte boven zeeniveau bereikt zou kunnen worden. (Daar is de lucht ijler en dus de luchtweerstand kleiner. Daardoor is k kleiner.)

Om zijn bewering te illustreren maakte hij figuur 2. In figuur 2 is grafiek A als volgt tot stand gekomen.
Bij een officieel record moeten fiets en berijder aan allerlei voorschriften voldoen. De mogelijkheden om binnen deze voorschriften de stroomlijn te verbeteren leken optimaal benut. Daarmee lag voor elke hoogte de waarde van k vast. Met behulp van de formule voor W kon hij dus berekenen hoeveel vermogen een wielrenner nodig had om 55 km/uur (15,3 m/sec) te fietsen.

figuur 2



Zo is bijvoorbeeld, volgens de maker van figuur 2, op zeeniveau $k = 0{,}13$.

5p **3** □ Bereken hoe groot k is op 2000 meter hoogte volgens de maker van figuur 2.

In grafiek B van figuur 2 is het maximale vermogen te zien dat een ideale wielrenner een uur lang zou kunnen leveren. (Ook dat neemt af naarmate men hoger komt, doordat de ijlere lucht minder zuurstof bevat.)

Volgens de maker van figuur 2 zou de prestatie van Rominger (55,291 km) op zeeniveau onmogelijk zijn.

Het record van Indurain was 53,040 km.

4p **4** □ Onderzoek met behulp van de formule voor W of het record van Indurain volgens de maker van figuur 2 op zeeniveau wel mogelijk is.

Opgave 2 Park

De gemeente A. kan van een particuliere eigenaar een stuk grond kopen van 36 000 m^2. De betrokken wethouder wil het terrein kopen en een deel als park inrichten, een deel doorverkopen aan een volkstuinvereniging, en de rest doorverkopen aan de firma TuinTotaal, die daar een tuincentrum wil vestigen.

De gemeenteraad stelt als eis dat de oppervlakte die voor het park beschikbaar blijft ten minste 1,5 maal zo groot is als de oppervlakte van het deel dat aan de volkstuinvereniging wordt verkocht.
Als voorwaarde noemt de firma TuinTotaal in het overleg met de wethouder het aantal m^2 dat minimaal nodig is voor het tuincentrum.

Een ambtenaar gaat met bovenstaande gegevens aan de slag. Het aantal m^2 park noemt zij x en het aantal m^2 volkstuinen y, zodat er $36\,000 - x - y$ m^2 voor het tuincentrum overblijft. Zij maakt een figuur die ook de voorwaarde van de firma TuinTotaal bevat. Deze figuur staat op de bijlage. In de figuur is het toegestane gebied grijs.

5p **5** □ Leid uit de figuur af hoeveel m^2 volgens de firma TuinTotaal minimaal nodig is voor het tuincentrum.

De gemeenteraad stelt ook nog als eis dat de kosten voor de aankoop van de grond en de inrichting van het park niet hoger zijn dan de opbrengst uit het doorverkopen van de grond. Hierbij geldt:

- Het inrichten van het park kost de gemeente 105 gulden per m^2.
- Volgens de daarvoor geldende afspraken betaalt de volkstuinvereniging 120 gulden per m^2.
- De firma TuinTotaal betaalt 300 gulden per m^2.
- De aankoopprijs van de grond ligt nog niet vast. Daarover moet de wethouder nog met de eigenaar onderhandelen.

De wethouder wil weten hoeveel invloed de aankoopprijs van de grond heeft op de te realiseren aantallen m^2 park en volkstuinen.
Volgens de ambtenaar geldt bij een aankoopprijs van p gulden per m^2 de volgende beperkende voorwaarde: $9x + 4y \leq 240\,000 - 800p$.

7p **6** □ Toon aan dat deze voorwaarde klopt.

Deze laatste voorwaarde geeft voor elke waarde van p een andere grenslijn en dus een ander toegestaan gebied.

4p **7** □ Teken in de figuur op de bijlage de grenslijn voor $p = 75$ en geef het nieuwe toegestane gebied aan.

De gemeenteraad streeft bij de verdeling van de grond naar een zo hoog mogelijke waardering door de bevolking. Deze waardering wordt uitgedrukt in waarderingspunten: 2 punten per m^2 voor het park, 1 punt per m^2 voor de volkstuinen, en 0 punten per m^2 voor het tuincentrum. W is het totale aantal waarderingspunten.

6p **8** □ Bereken, bij een aankoopprijs van 75 gulden per m^2, bij welke waarden van x en y geldt dat W zo hoog mogelijk is.

Bijlage bij opgave 2

Wiskunde A

Examen VWO 1999

Tijdvak 2
Dinsdag 22 juni
13.30–16.30 uur

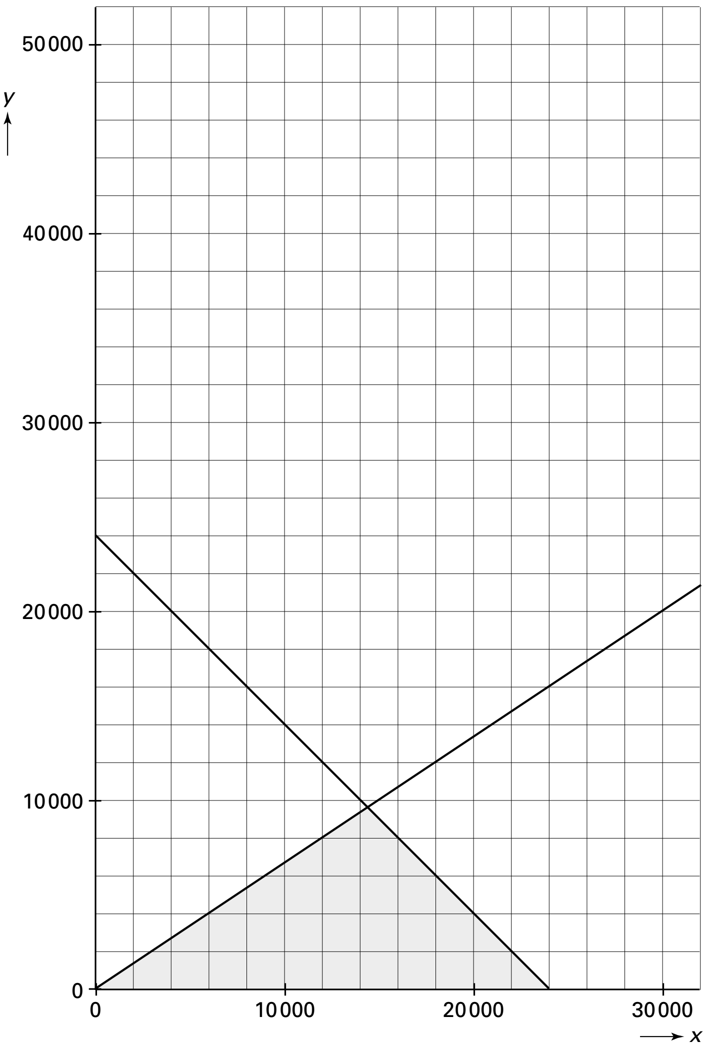
Examennummer

....

Naam

....

Opgave 2



Opgave 3 Powerball

In de Verenigde Staten zijn loterijen erg populair. Een ervan is Powerball. Voor 1 dollar kun je meedoen. Je moet dan een formulier invullen waarop een witte en een rode tabel staan, elk met de getallen 1 tot en met 45. In de witte tabel moet je vijf getallen omcirkelen, en in de rode tabel één getal. Bij de trekking worden aselect zonder teruglegging vijf ballen getrokken uit een trommel met 45 genummerde witte ballen en één bal uit een andere trommel met 45 genummerde rode ballen. De organisatie publiceert het volgende overzicht.

overzicht

goed geraden	prijs	kans
5 witte en de rode	jackpot	1 op 54 979 155
5 witte, niet de rode	\$ 100 000	1 op 1 249 526
4 witte en de rode	\$ 5000	1 op 274 896
4 witte, niet de rode	\$ 100	1 op 6248
3 witte en de rode	\$ 100	1 op 7049
3 witte, niet de rode	\$ 5	1 op 160
2 witte en de rode	\$ 5	1 op 556
1 witte en de rode	\$ 2	1 op 120
0 witte en de rode	\$ 1	1 op 84

Alle prijzen behalve de jackpot zijn vaste bedragen per deelnameformulier.
De getallen in de kolom 'kans' zijn afgerond op gehele getallen.

Volgens het overzicht is de kans op \$ 5000 gelijk aan $\frac{1}{274\,896}$.

6p **9** □ Toon met een berekening aan dat de kans op \$ 5000 klopt.

De klantenservice van de organisatie wordt regelmatig benaderd door mensen die menen dat de kans op \$ 1 niet 1 op 84 maar 1 op 45 is. De klantenservice legt uit dat zij zich vergissen in wat je goed geraden moet hebben om de prijs van \$ 1 te winnen.

2p **10** □ Bij welke voorwaarde zou de kans op een prijs wel 1 op 45 zijn? Licht je antwoord toe.

De organisatie stort van elke ingezette dollar 0,3082 dollar in de jackpot.
De jackpot wordt na elke trekking verdeeld over alle deelnameformulieren waarop alles goed geraden is. Als die er niet zijn, wordt het bedrag uit de jackpot toegevoegd aan de jackpot van de volgende trekking.
In 1998 viel de jackpot pas na zestien trekkingen op precies één deelnameformulier.
De winnaar kreeg een bedrag van 190 miljoen dollar.

4p **11** □ Hoeveel deelnameformulieren waren er in totaal ingevuld bij deze zestien trekkingen? Licht je antwoord toe.

De organisatie gaat er van uit dat per trekking 19,72% van het ingezette geld besteed moet worden aan de uitbetaling van de prijzen behalve de jackpot.

4p **12** □ Toon met een berekening aan dat die 19,72% naar verwachting klopt.

Er zijn twee trekkingen per week. Iemand speelt een jaar lang (104 trekkingen) bij elke trekking met één formulier mee.

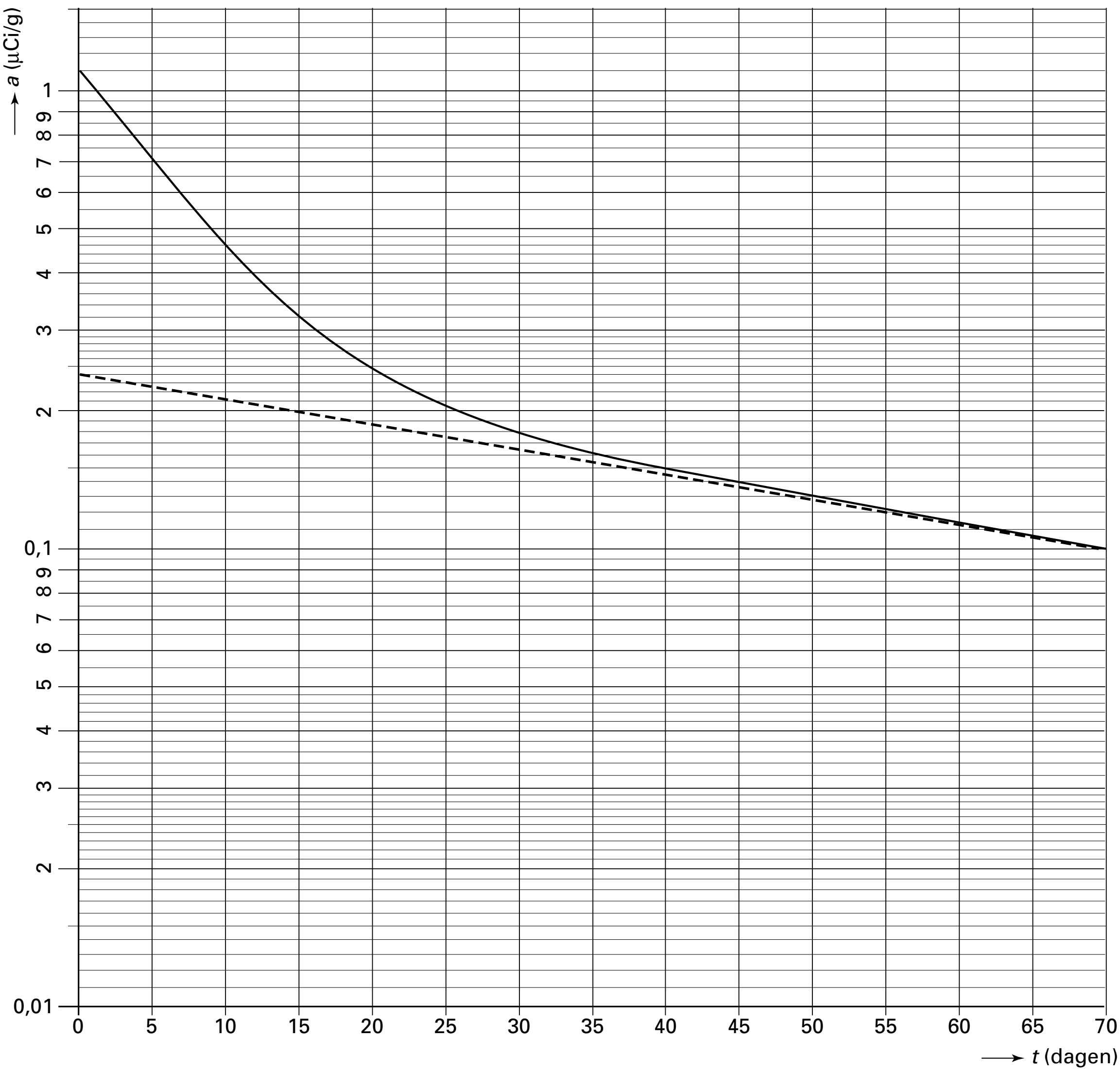
8p **13** □ Bereken de kans dat hij hierbij meer dan één keer een prijs wint.

Opgave 4 Cholesterol

Cholesterol speelt een belangrijke rol bij allerlei processen in het menselijk lichaam. Deze stof komt het lichaam binnen via het voedsel, maar wordt ook door het lichaam zelf aangemaakt.
Eind jaren zestig is veel onderzoek gedaan naar het verband tussen cholesterol en hart- en vaatziekten. De Amerikanen Goodman en Noble onderzochten de snelheid van verschillende processen in de cholesterol-huishouding. Ze gingen als volgt te werk: Bij een aantal proefpersonen spoten ze een kleine hoeveelheid radioactieve cholesterol in. Deze vermengde zich vrijwel direct met de reeds aanwezige cholesterol in het bloed en de ingewanden. Daarna werd tien weken lang de radioactiviteit gemeten van de cholesterol in het bloed en de ingewanden van de proefpersonen. De radioactiviteit van de cholesterol in het bloed en de ingewanden neemt in de loop van de tijd af door uitscheiding van cholesterol (uit het lichaam) en door opname van cholesterol uit het bloed en de ingewanden door de rest van het lichaam.
In figuur 3 is het resultaat van de metingen bij een proefpersoon weergegeven door middel van een *ononderbroken* grafiek op enkellogaritmisch papier. Figuur 3 staat ook op de bijlage.

figuur 3

Radioactiviteit van de cholesterol in het bloed en de ingewanden



Langs de horizontale as staat t, de tijd in dagen vanaf het moment van inspuiten. Langs de verticale as staat a, de radioactiviteit in microcurie (µCi) per gram cholesterol.

De totale radioactiviteit van de ingespoten cholesterol bedroeg 30 µCi.

3p **14** □ Toon aan dat het bloed en de ingewanden van deze proefpersoon in totaal ongeveer 27 gram cholesterol bevatten.

De grafiek van a nadert tot een rechte lijn (de stippellijn in figuur 3). Deze rechte lijn is de grafiek van een functie van t.

5p **15** □ Stel een formule op van deze functie.

De grafiek van a ligt boven de genoemde lijn.

6p **16** □ Toon aan dat het verschil van beide functies een exponentiële functie is. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de bijlage.

Goodman en Noble waren niet alleen in staat een formule op te stellen voor de totale radioactiviteit in het bloed en de ingewanden, maar ook voor de totale radioactiviteit in 'de rest van het lichaam' (R):

$$R = 14{,}88 \cdot e^{-0{,}0146t} - 14{,}88 \cdot e^{-0{,}141t} \qquad R \text{ in µCi}, t \text{ in dagen.}$$

Eerst stijgt R door opname van radioactieve cholesterol uit het bloed en de ingewanden, daarna daalt R weer door de vervanging door nieuwe cholesterol.

6p **17** □ Toon met behulp van differentiëren aan dat de maximale waarde van R wordt bereikt gedurende de achttiende dag.

Het doel van dit onderzoek was meer inzicht te krijgen in de werking van medicijnen voor patiënten met stofwisselingsstoornissen. Zo vroeg men zich af of het medicijn CPIB de uitscheiding van cholesterol zou verhogen. Bij 20 patiënten werd een onderzoek zoals hierboven beschreven twee maal uitgevoerd. Tijdens het eerste onderzoek kregen ze geen medicijnen, tijdens het tweede onderzoek kregen ze CPIB toegediend. Op grond van de meetgegevens is met bovenstaand model de uitscheiding van cholesterol (U, in gram per dag) te berekenen. De resultaten staan in de tabel hieronder.

tabel

patiënt	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
U, zonder CPIB	1,6	1,3	1,7	1,9	1,5	1,0	2,0	1,7	1,4	1,8
U, met CPIB	1,8	1,1	1,9	2,0	1,1	1,2	2,1	1,5	1,5	1,4

patiënt	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
U, zonder CPIB	1,3	1,2	1,8	1,4	1,6	1,9	1,2	1,8	1,5	1,9
U, met CPIB	1,6	1,3	1,9	1,7	1,4	1,6	1,3	1,9	1,9	2,0

6p **18** □ Onderzoek of bij een significantieniveau van 5% de conclusie gerechtvaardigd is dat CPIB de uitscheiding van cholesterol verhoogt.

Bijlage bij opgave 4

Opgave 4