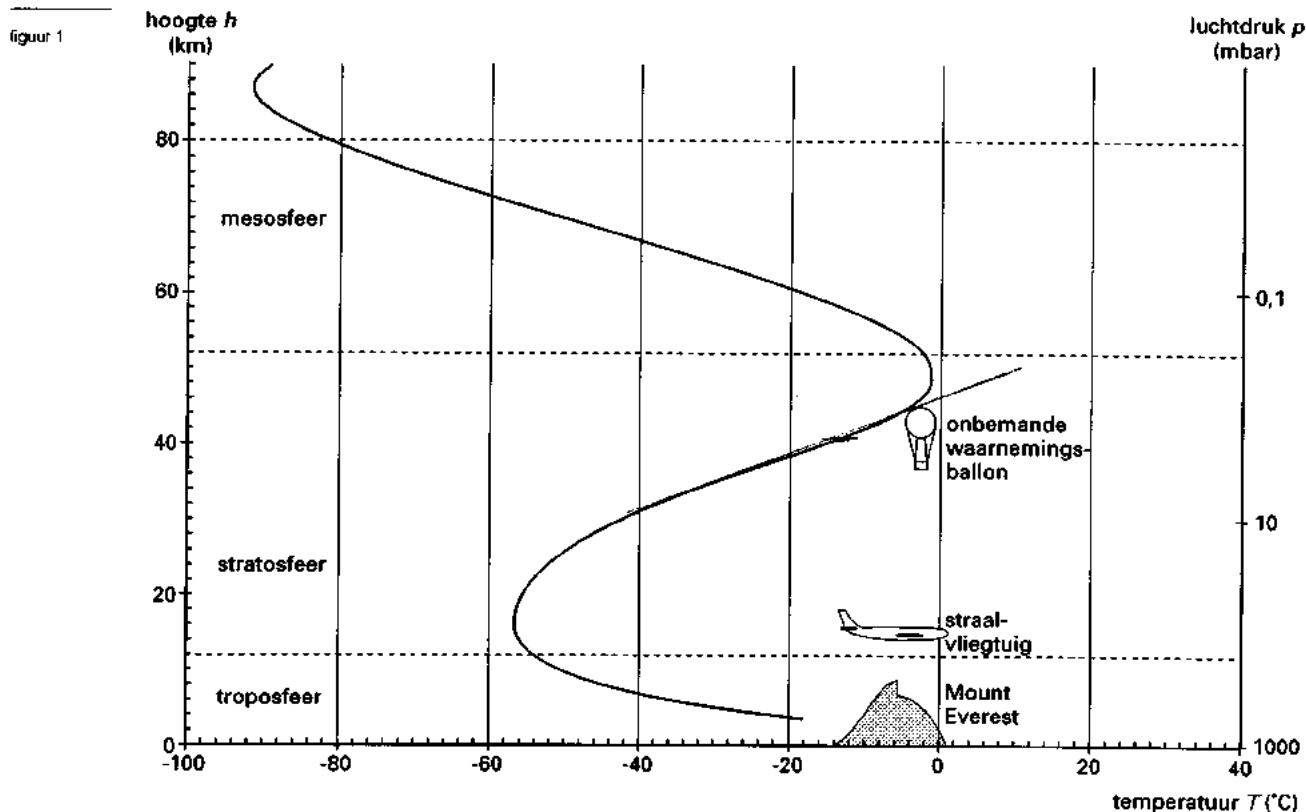


Opgave 1 De atmosfeer

De luchtdruk en de temperatuur in de atmosfeer hangen af van de hoogte. In figuur 1 zijn de hoogte h (in kilometers) en de bijbehorende luchtdruk p (in millibar) langs de verticale assen uitgezet. Langs de horizontale as staat de temperatuur T (in °C). Figuur 1 staat ook op de bijlage.



In figuur 1 is te zien dat de temperatuur eerst afneemt naarmate je verder van het aardoppervlak afkomt, vervolgens toeneemt en vanaf een hoogte van ongeveer 50 km weer afneemt.

- Rond een hoogte van 40 km neemt de temperatuur toe als de hoogte toeneemt.
- sp 1 Hoe groot is deze toename in °C per km? Licht je antwoord toe met behulp van de figuur op de bijlage.

Naarmate je hoger boven het aardoppervlak komt, wordt de luchtdruk lager. Tussen h en p geldt bij benadering het volgende verband:

$$p = 1000 \cdot 0,86^h$$

- sp 2 Leid dit verband af door in figuur 1 de schaalverdelingen van h en p te vergelijken.

Bergwandelaars gebruiken vaak een hoogtemeter. De werking daarvan berust op het verband tussen hoogte en luchtdruk. Daarbij kan niet zonder meer bovenstaande formule gehanteerd worden, want bij mooi weer is de luchtdruk overal enkele procenten hoger en bij slecht weer overal enkele procenten lager dan de formule aangeeft. Daarom wordt aan het begin van een bergtocht de hoogtemeter geijkt door op een punt waarvan de hoogte bekend is, de meter op deze hoogte in te stellen. Zolang het weer niet verandert, geeft de meter overal de juiste hoogte aan.

Eindexamen wiskunde A vwo 1998-I

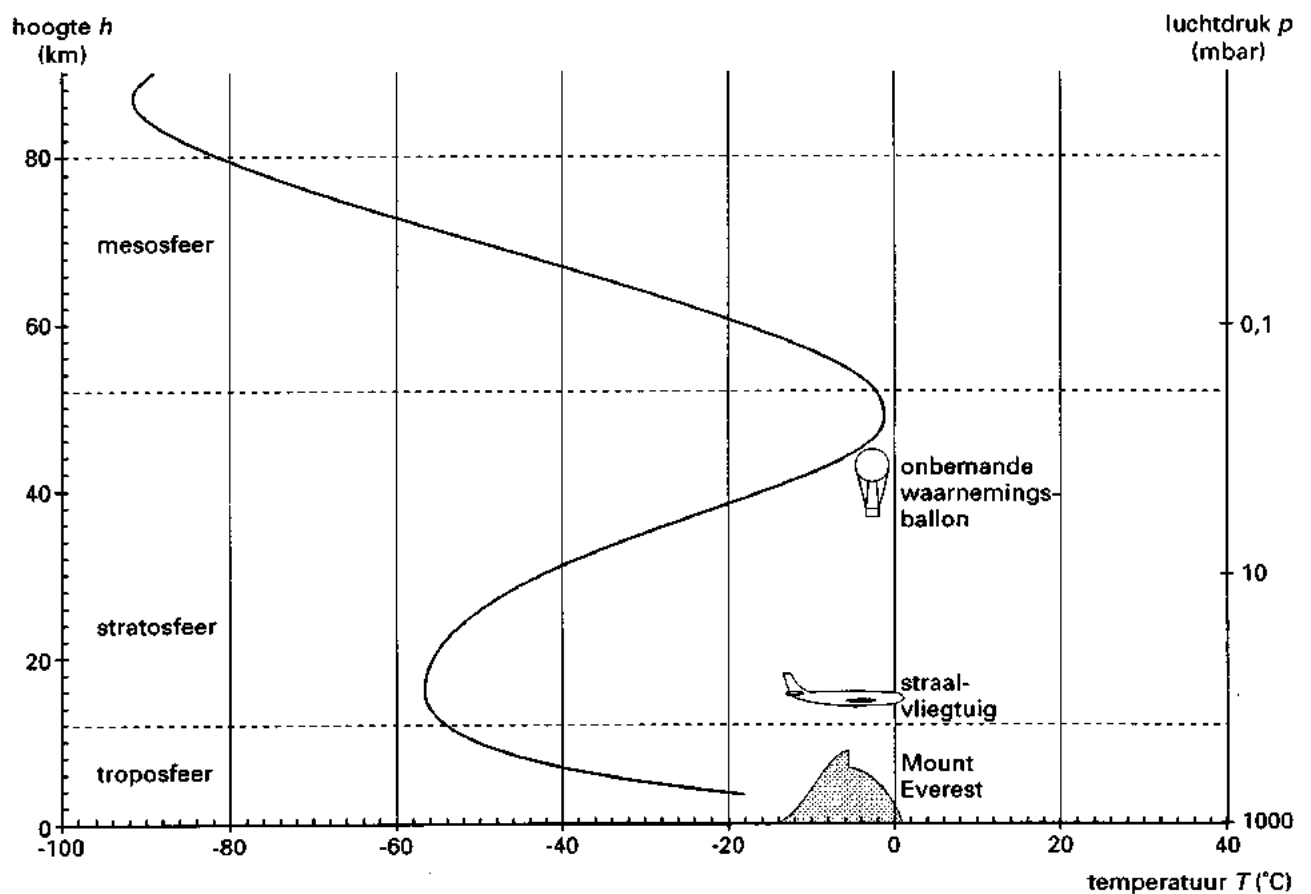
Een bergwandelaarster ikt haar hoogtemeter op een punt op 2000 meter hoogte. Na een lange wandeling blijkt uit de kaart dat zij op een hoger gelegen punt is geëindigd. De wandelaarster ziet tot haar verbazing dat de hoogtemeter nog steeds een hoogte van 2000 meter aangeeft.

3p 3 Wijst dit op een verbetering van het weer? Licht je antwoord toe.

Neem aan dat terwijl deze wandelaarster aan het klimmen was, de luchtdruk overal 6% is toegenomen.

5p 4 Bereken hoeveel meter de wandelaarster dan is gestegen.

Bijlage bij vraag 1



Opgave 2 Telepathie in de klas

De volgende tekst is ontleend aan 'Het Schoolblad' van 9 oktober 1993.

tekst

Eind jaren '50 vonden in Nederland enkele parapsychologische onderzoeken plaats naar telepathisch contact tussen leerkrachten en leerlingen, die zelfs nu nog verbazen door hun grootscheepse opzet.

Een rijksinspecteur voor het lager onderwijs in Amsterdam, J.G. van Busschbach, heeft zich destijds vastgebeten in de vraag: is er in de relatie tussen opvoeder en pupil een buitenzintuiglijke factor in het spel? De inspecteur deed onder meer in Amsterdam en Dordrecht proeven met leerlingen uit de eerste, tweede, vijfde en zesde klas van de lagere school.

Dat ging als volgt. Een leerkracht zit achterin de klas, niet zichtbaar voor de kinderen, met drie omgekeerde kaarten voor zich. Op de kaarten staan bijvoorbeeld een cirkel, een vierkant en een driehoek. De leerkracht draait bij elke beurt een willekeurige kaart om en bekijkt deze goed. De leerlingen moeten de figuur raden die op de kaart staat en deze aanstrepen op een papier.

Van Busschbach ging niet over een nacht ijs. Hij liet veertig leerkrachten en 1434 leerlingen dit spel uitvoeren. Dit leverde in totaal 51 624 gissingen op. Hiervan waren er 17 761 juist. Dat is meer dan de kansberekening aangeeft, er is geen sprake van toeval, maar van een significant verschil.

Bij het onderzoek werd telkens een *serie* van 12 gissingen na elkaar uitgevoerd. Elke leerling deed mee aan 3 series.

Neem aan dat het juist raden van een kaart volledig op toeval berust.

- 6p 5 Bereken de kans dat een leerling bij elk van de drie series meer dan 4 keer juist raadt.

Bij het in de tekst genoemde resultaat vergeleek Van Busschbach alleen de figuur die een leerling aanstreepte met de figuur die de leerkracht op dat moment voor zich had. In het onderzoek lette Van Busschbach ook op:

- *postcognitie*, dat wil zeggen dat hij de figuur die een leerling aanstreepte, vergeleek met de figuur die de leerkracht één beurt of twee beurten eerder in die serie voor zich had;
- *precognitie*, dat wil zeggen dat hij de figuur die een leerling aanstreepte, vergeleek met de figuur die de leerkracht één beurt of twee beurten later in die serie voor zich had.

- 6p 6 Bereken het *totaal* aantal keer dat Van Busschbach in dit onderzoek twee figuren met elkaar vergeleek.

Om conclusies uit zo'n experiment te mogen trekken, is het noodzakelijk dat het experiment statistisch verantwoord wordt uitgevoerd. Het kiezen van de kaart die omgedraaid wordt, moet bijvoorbeeld aselekt plaatsvinden.

Om dit nader te onderzoeken, let men op het aantal wisselingen in de kaartseries. Uit onderzoek is bekend dat proefpersonen die bewust proberen 'willekeurige' series te maken, te vaak wisselen.

Zo is 'driehoek-cirkel-vierkant-cirkel-cirkel-driehoek-vierkant-cirkel' een serie van acht kaarten, waarbij in zes van de zeven overgangen gewisseld wordt.

Neem aan dat het kiezen van de kaarten inderdaad aselekt plaatsvindt.

- 6p 7 Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van het aantal wisselingen in een serie van 12 kaarten.

Eindexamen wiskunde A vwo 1998-I

Neem aan dat het experiment statistisch verantwoord is uitgevoerd. De tekst eindigt met: *'Hiervan waren er 17 761 juist. Dat is meer dan de kansberekening aangeeft, er is geen sprake van toeval, maar van een significant verschil.'*

- 4p **8** Bereken hoeveel procent de 17 761 juiste gissingen boven het verwachte aantal juiste gissingen ligt. Rond je antwoord af op 1 decimaal.
- 8p **9** Onderzoek of de uitspraak aan het eind van de tekst juist is bij een significantieniveau van 1%.

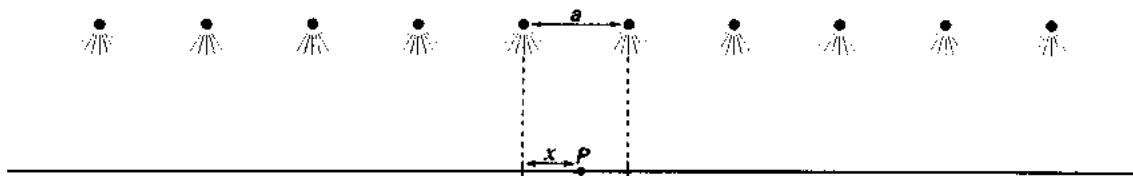
Opgave 3 Wegverlichting

Een belangrijke eis die aan wegverlichting gesteld wordt, is dat het overal langs de te verlichten weg ongeveer even licht is, en niet bijvoorbeeld halverwege tussen twee lampen veel donkerder dan vlak onder een lamp.

Om aan te geven hoe licht het op een bepaalde plaats is, gebruikt men het begrip *verlichtingssterkte* (gemeten in *lux*).

Voor een aan te leggen weg heeft men diverse mogelijkheden voor de afstand tussen opeenvolgende lampen onderzocht. Telkens is voor een aantal punten van het weggedeelte tussen twee lampen de verlichtingssterkte berekend. Hierbij is a de afstand tussen twee lampen (in meters), en geeft x aan hoeveel meter men verwijderd is van het punt recht onder een van de lampen. Zie figuur 2.

figuur 2



Het resultaat van de berekeningen staat in tabel 1.

tabel 1

x	a	6	8	10	12	14	16	18	20
0		321,1	245,4	199,7	170,5	151,2	138,0	128,8	122,3
1		321,2	245,2	199,3	169,8	150,2	136,9	127,6	121,0
2		321,2	244,8	198,0	167,8	147,6	133,7	124,1	117,3
3		321,2	244,3	196,5	165,0	143,8	129,2	119,0	111,7
4		321,2	244,1	195,3	162,4	139,7	124,0	113,0	105,2
5		321,2	244,3	194,8	160,4	136,1	119,0	106,9	98,4
6		321,1	244,8	195,3	159,7	133,7	114,9	101,6	92,1
7			245,2	196,5	160,4	132,8	112,3	97,4	86,8
8			245,4	198,0	162,4	133,7	111,4	94,8	82,8
9				199,3	165,0	136,1	112,3	93,9	80,4
10				199,7	167,8	139,7	114,9	94,8	79,5
11					169,8	143,8	119,0	97,4	80,4
12					170,5	147,6	124,0	101,6	82,8
13						150,2	129,2	106,9	86,8
14						151,2	133,7	113,0	92,1
15							136,9	119,0	98,4
16							138,0	124,1	105,2
17								127,6	111,7
18								128,8	117,3
19									121,0
20									122,3

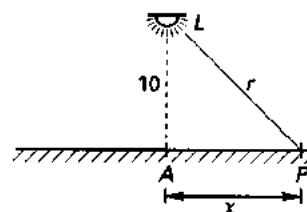
Volgens tabel 1 zou het plaatsen van lampen met een onderlinge afstand van 6 meter zorgen voor een ideale gelijkmatige verlichting. Dit is echter economisch niet haalbaar. Het verschil tussen de grootste en de kleinste waarde van de verlichtingssterkte mag niet meer zijn dan 20% van de grootste waarde.

- 4p 10 Voor welke waarden van a in tabel 1 is voldaan aan deze voorwaarde? Licht je antwoord toe.

De waarden in tabel 1 zijn verkregen door eerst te berekenen hoe groot de verlichtingssterkte is die elke lamp afzonderlijk op een bepaalde plaats oplevert, en daarna de uitkomsten op te tellen.

Voor het berekenen van de verlichtingssterkte bij één lamp gebruikt men het volgende model. Uitgangspunt is een lamp die op 10 meter hoogte boven het wegdek hangt, en waarvan het licht zich in alle richtingen naar beneden kan verspreiden. Zie figuur 3.

figuur 3



De afstand van de lamp tot een punt P op het wegdek noemen we r (in meters). De verlichtingssterkte in punt P noemen we S (in lux). Voor S geldt:

$$S = \frac{100\,000}{r^3}$$

Punt A bevindt zich recht onder de lamp, x is de afstand in meters tussen punt A en punt P .

- 5p 11 Bereken x als de verlichtingssterkte in P de helft is van die in A . Rond het antwoord af op gehele decimeters.

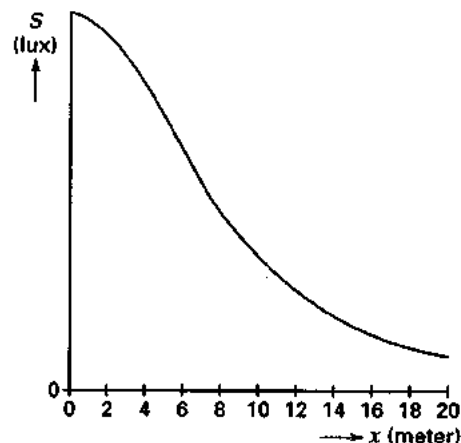
Men kan S ook als functie van x opvatten. De afgeleide functie $\frac{dS}{dx}$ is een maat voor de verandering van de verlichtingssterkte (in lux/meter) als men zich over het wegdek van het punt A verwijderd. Er geldt:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-300\,000 \cdot x}{(100 + x^2)^2 \cdot \sqrt{100 + x^2}}$$

- 5p 12 Toon dit aan.

In figuur 4 is de grafiek van S als functie van x getekend.

figuur 4



Iemand vraagt zich af of er een punt is waar $\frac{dS}{dx}$ kleiner is dan -8 lux/m.

Hij probeert vergeefs deze vraag te beantwoorden door een vergelijking op te lossen. Met behulp van figuur 4 en de formule voor $\frac{dS}{dx}$ is echter snel na te gaan dat er inderdaad zo'n punt bestaat.

- 3p 13 Laat dit zien.

Opgave 4 Gordijnstof

Een weverij maakt drie soorten gordijnstof: Rosa, Lelie en Narcis. De gordijnstoffen worden geweven uit katoendraad in de kleuren rood, geel en groen. Voor elk soort gordijnstof worden de kleuren in een andere verhouding gebruikt. De weverij levert de gordijnstoffen op rollen met een vaste breedte.

Het bedrijf krijgt een opdracht voor het maken van 4000 meter gordijnstof, waarbij van elke soort ten minste 500 meter gemaakt moet worden. Men staat nu voor de vraag: 'hoe verdeel je deze 4000 meter gordijnstof het beste over de soorten Rosa, Lelie en Narcis?' Bij het beantwoorden van deze vraag moet men rekening houden met de aanwezige voorraad katoendraad en met de winst die op elke soort gordijnstof gemaakt kan worden.

In tabel 2 staan de gegevens over de voorraad, de winst en de kleurenverhouding van de stoffen.

tabel 2

	rood	geel	groen	
voorraad katoendraad	2160 kg	930 kg	1800 kg	
	nodig per meter gordijnstof			winst per meter gordijnstof
Rosa	0,6 kg		0,4 kg	8 gulden
Lelie	0,6 kg	0,3 kg		2 gulden
Narcis		0,3 kg	0,6 kg	9 gulden

Neem aan dat het bedrijf de opdracht uitvoert door x meter Rosa te maken, y meter Lelie en de rest Narcis.

Bovenstaande informatie leidt tot de volgende beperkende voorwaarden voor x en y :

$$\begin{aligned} x &\geq 900; \\ y &\geq 500; \\ x + y &\leq 3500; \\ x + 3y &\geq 3000. \end{aligned}$$

- s_p 14 Toon dit aan.
 s_p 15 Teken het toegestane gebied.
 s_p 16 Bereken hoeveel meter het bedrijf van elke soort gordijnstof moet maken om zo veel mogelijk winst op deze opdracht te maken.

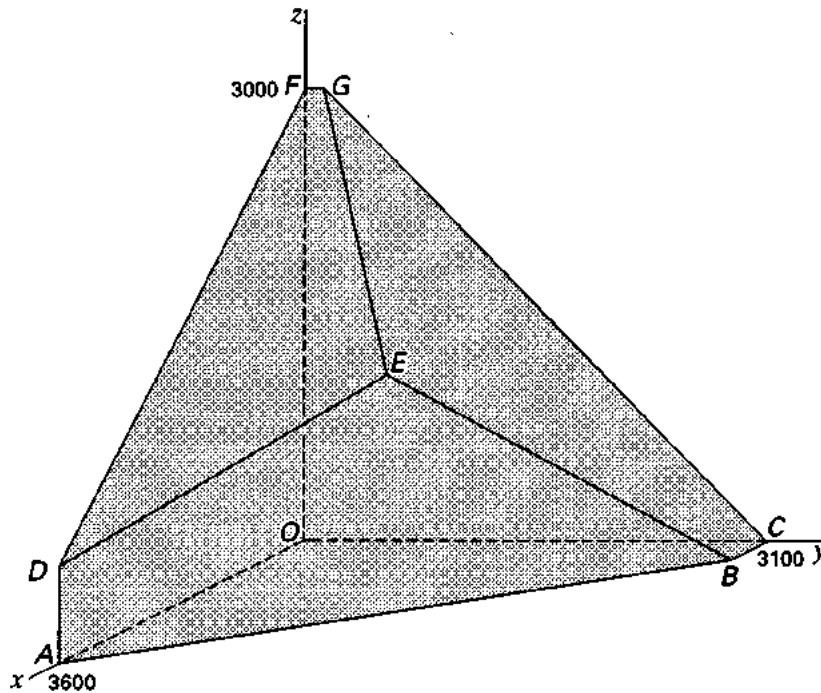
Omdat het bedrijf niet zo goed loopt, overweegt men om het bedrijf op te heffen. In dat geval neemt men de bovenstaande opdracht niet aan. In plaats daarvan onderzoekt men of het mogelijk is om van de huidige voorraad katoendraad (zie tabel 2) zo veel mogelijk te verwerken tot gordijnstof. Deze gordijnstof wil men dan in eigen beheer verkopen. Men verwacht hierbij evenveel winst per meter gordijnstof te kunnen maken als in tabel 2 staat.

Stel dat het bedrijf x meter Rosa, y meter Lelie en z meter Narcis maakt. De gegevens in tabel 2 leiden dan tot de volgende beperkende voorwaarden voor x , y en z :

$$\begin{aligned} x &\geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \\ x + y &\leq 3600; \\ y + z &\leq 3100; \\ 2x + 3z &\leq 9000. \end{aligned}$$

Het toegestane gebied is dan een ruimtelijke figuur. Zie figuur 5.

figuur 5



De coördinaten van de punten B , D en G zijn $B(500, 3100, 0)$, $D(3600, 0, 600)$ en $G(0, 100, 3000)$.

Bij punt G hoort de volgende beschrijving: van de gele en de groene katoendraad wordt alles gebruikt, maar van de rode katoendraad blijft over.

5p 17 Geef net zo'n beschrijving voor punt D . Licht je antwoord toe.

Het blijkt mogelijk alle katoendraad te verwerken. Deze mogelijkheid komt overeen met punt E in figuur 5.

5p 18 Bereken hoeveel meter gordijnstof er in totaal gemaakt zal worden, als men besluit om *alle* katoendraad te verwerken.