

Opgave 1 Olieraffinage

Aardolie is in natuurlijke vorm nauwelijks bruikbaar. Zij moet een aantal bewerkingen ondergaan in een raffinaderij. Na de eerste bewerkingsronde ontstaat een aantal tussenproducten.

De tussenproducten ondergaan een tweede bewerkingsronde. Er ontstaan dan hoogwaardige eindproducten, bijvoorbeeld benzine.

Aardolie kent grote verschillen in samenstelling, afhankelijk van de bron waaruit zij gewonnen wordt. Dit heeft tot gevolg dat de verhouding van de hoeveelheden tussenproduct na de eerste bewerkingsronde afhankelijk is van de herkomst van de aardolie.

In de vragen 1, 2 en 3 werken we met het volgende vereenvoudigde model.

Een oliemaatschappij wint aardolie uit drie bronnen die we aanduiden met B1, B2 en B3.

Na de eerste bewerkingsronde ontstaan drie tussenproducten die we aangeven met licht, middelzwaar en zwaar.

Na de tweede bewerkingsronde ontstaan drie eindproducten: benzine, kerosine en smeerolie.

Bij de eerste bewerkingsronde hoort overgangsmatrix A:

matrix

$$\begin{array}{l} \text{tussenproduct} \\ \text{licht} \\ \text{middelzwaar} \\ \text{zwaar} \end{array} \begin{array}{l} \text{aardolie uit} \\ \text{B1} \\ \text{B2} \\ \text{B3} \end{array} \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix} = A$$

Neem aan dat er in een bepaalde week 4000 ton aardolie uit B1, 8000 ton uit B2 en 6000 ton uit B3 zijn verwerkt.

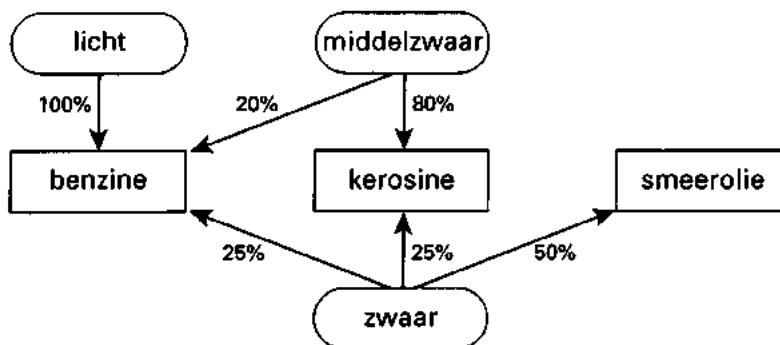
- 3p 1 Bereken hoeveel ton van elk van de tussenproducten die week is vervaardigd.

In een andere week zijn de volgende hoeveelheden tussenproducten vervaardigd: 2600 ton licht, 3200 ton middelzwaar en 4200 ton zwaar.

- 6p 2 Bereken hoeveel ton aardolie uit B1, hoeveel ton uit B2, en hoeveel ton uit B3 die week zijn verwerkt.

Voor de tweede bewerkingsronde kun je de omzettingspercentages in onderstaande graaf aflezen:

graaf



- 4p 3 Bereken hoeveel procent van de aardolie afkomstig uit B3 omgezet wordt in benzine.

Eindexamen wiskunde A vwo 1997-II

In werkelijkheid wint een oliemaatschappij aardolie uit meer dan drie bronnen en worden er meer dan drie tussenproducten en eindproducten vervaardigd.

Veronderstel dat de aardolie wordt gewonnen uit de bronnen B1, B2, ..., B9 en dat tijdens de eerste bewerkingsronde de tussenproducten T1, T2, ..., T9 vervaardigd worden. M is de overgangsmatrix die hoort bij de eerste bewerkingsronde.

M heeft het volgende bouwschema:

$$\begin{array}{l} \text{T1} \\ \text{T2} \\ \text{T3} \\ \text{T4} \\ \text{T5} \\ \text{T6} \\ \text{T7} \\ \text{T8} \\ \text{T9} \end{array} \begin{pmatrix} \text{B1} & \text{B2} & \text{B3} & \text{B4} & \text{B5} & \text{B6} & \text{B7} & \text{B8} & \text{B9} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = M$$

Tijdens de tweede bewerkingsronde worden de tussenproducten T1, T2, ..., T9 omgezet in de eindproducten E1, E2, ..., E9.

Bij de tweede bewerkingsronde hoort een overgangsmatrix N .

Het hele omzettingsproces van de verschillende soorten aardolie naar de eindproducten kan beschreven worden door één matrix O .

- sp 4 □ Geef het bouwschema van N en van O en geef een formule die het verband tussen M , N en O weergeeft.

Opgave 2 Levensduur van kunststoffen

In de loop van deze eeuw is men steeds meer voorwerpen van kunststof ('plastic') gaan maken. Er zijn allerlei soorten kunststof.

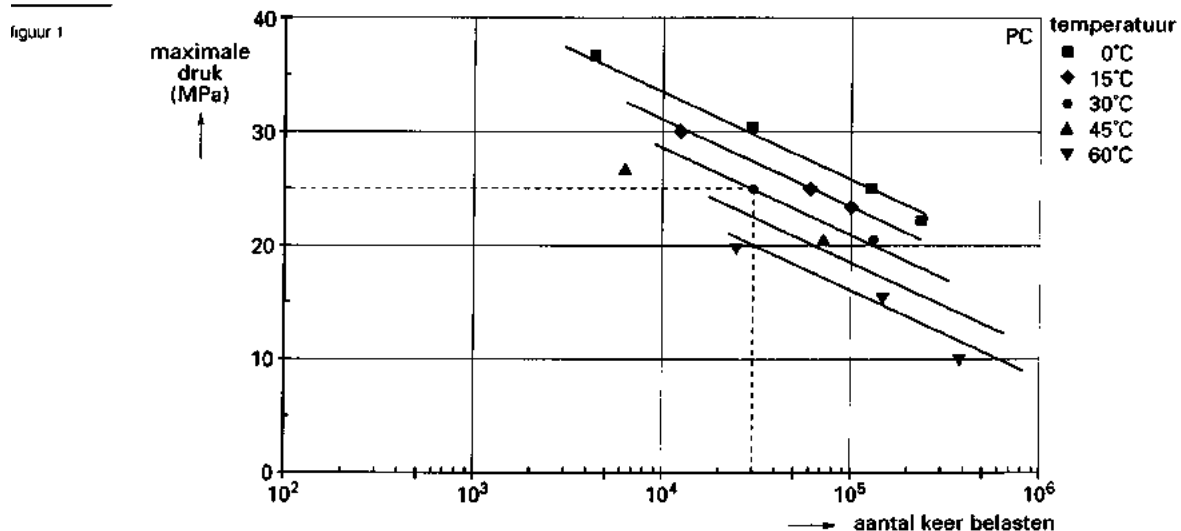
Een voorwerp van kunststof kan breken. Soms gebeurt dit in één keer door overbelasting, bijvoorbeeld als je een plastic koffielepeltje dubbelvouwt. Ook bij normaal gebruik kan een voorwerp van kunststof breken, doordat het heel vaak tamelijk licht belast wordt. Denk maar aan een schoenzool die bij elke stap heen en weer buigt, of een tuinstoel die telkens iets doorbuigt als er iemand op gaat zitten. Er ontstaan dan heel kleine scheurtjes, die geleidelijk aan steeds groter worden, tot het voorwerp uiteindelijk breekt. Na hoeveel tijd dat gebeurt, hangt onder meer af van de temperatuur.

ABS is een kunststof, waar men onder andere schoenzolen van maakt. Uit een Delfts onderzoek blijkt dat voor voorwerpen van ABS de volgende vuistregel geldt: *als de temperatuur 10 °C hoger wordt, dan wordt de levensduur half zo lang.* Deze regel geldt voor zover de overige omstandigheden gelijk blijven.

We kijken wat dit betekent voor de levensduur van schoenzolen in Nederland en in Kenia. Neem aan dat het in Nederland voortdurend 15 °C is, en in Kenia 30 °C. De levensduur van een schoenzool is in Nederland 5 jaar.

4p 5 □ Bereken de levensduur van zo'n schoenzool in Kenia bij hetzelfde gebruik.

Een andere bekende kunststof is PC. Ook dit materiaal heeft men in Delft onderzocht. Bij een van de onderzoeken belastte men stukjes PC een groot aantal keren, tot ze braken. Hoeveel keer een stukje PC kan worden belast, hangt af van de temperatuur, en van de maximale druk die bij het belasten wordt uitgeoefend. In figuur 1 zijn de resultaten verwerkt.



De temperatuur wordt uitgedrukt in °C, de maximale druk in MPa (megapascal). Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat bij een temperatuur van 30 °C en een maximale druk van 25 MPa een stukje PC brak na ongeveer 30 000 keer belasten.

Op grond van deze proeven is een model opgesteld. Hierbij horen de *lijnen* in figuur 1.

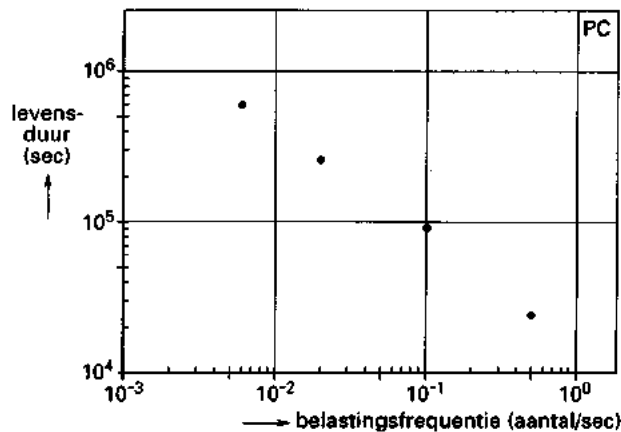
Eindexamen wiskunde A vwo 1997-II

Volgens dit model geldt voor PC: naarmate de temperatuur hoger is, breekt het materiaal na een kleiner aantal keer belasten. (De overige omstandigheden blijven hierbij gelijk.) Bij elke 15 °C temperatuurverhoging vermindert dit aantal met een vast percentage.

- 5p 6 Bereken met behulp van figuur 1 hoe groot dit percentage ongeveer is.

Behalve de temperatuur en de maximale druk is ook van belang hoeveel keer per seconde het materiaal belast wordt. Dit aantal wordt de *belastingfrequentie* genoemd. Het zal weinig verbazing wekken dat naarmate de belastingfrequentie lager is, de levensduur (in seconden) hoger is. Dit is te zien voor PC in figuur 2. Hierin zijn de resultaten van vier belastingsproeven weergegeven waarbij uitsluitend de belastingfrequentie telkens anders is gekozen.

figuur 2



- 4p 7 Deze vier proeven zijn na elkaar uitgevoerd. Bereken hoeveel dagen dit ten minste heeft geduurd.

We kunnen ook letten op het aantal keren dat het materiaal belast kan worden tot het breekt. Je zou kunnen denken dat dit aantal kleiner is naarmate de belastingfrequentie groter is.

- 3p 8 Toon aan dat dit niet waar is.

Voor de levensduur van een tuinstoel is niet alleen van belang of er lichte of zware personen op zitten, maar ook de manier waarop iemand gaat zitten, of iemand veel wiebelt, enzovoort. Om hierin meer inzicht te krijgen, heeft men in het laboratorium een installatie gebouwd waarmee met een steeds wisselende druk op een stoel *geduwd* kan worden.

De druk S die op de zitting wordt uitgeoefend, laat men volgens een sinusvormig patroon variëren.

In de volgende vragen gaan we uit van:

$$S = a \cdot \sin(bt) + c \quad (S \text{ in MPa en } t \text{ in seconden, } a \text{ en } c \text{ positief})$$

- 3p 9 Waarom geldt $a \leq c$?

Bij een proef heeft S een periode van 2 seconden, en geldt $a = 27,5$.

- 6p 10 Onderzoek of bij deze proef de snelheid waarmee de uitgeoefende druk verandert, op bepaalde momenten groter wordt dan 60 MPa per seconde.

Opgave 3 De droogte van 1976

In 1976 waren zowel de lente als de zomer in Nederland uitzonderlijk droog. Medewerkers van het KNMI hebben hier allerlei onderzoek naar gedaan.

Sinds het midden van de vorige eeuw wordt elke dag bijgehouden hoeveel neerslag er valt, gemiddeld over heel Nederland. Voor elk jaar is hiervan het totaal over de hele lente berekend, en ook over de hele zomer. De lente-totalen blijken bij benadering normaal verdeeld te zijn, en de zomer-totalen ook.

De waarden van gemiddelde en standaarddeviatie staan in tabel 1.

tabel 1

	gemiddelde	standaarddeviatie
neerslag per lente	136,2 mm	35,3 mm
neerslag per zomer	210,2 mm	53,4 mm

Er is geen aantoonbaar verband tussen de hoeveelheden neerslag in de lente en in de zomer van een jaar.

In 1976 viel in de lente 70,8 mm neerslag, en in de zomer 90,9 mm.

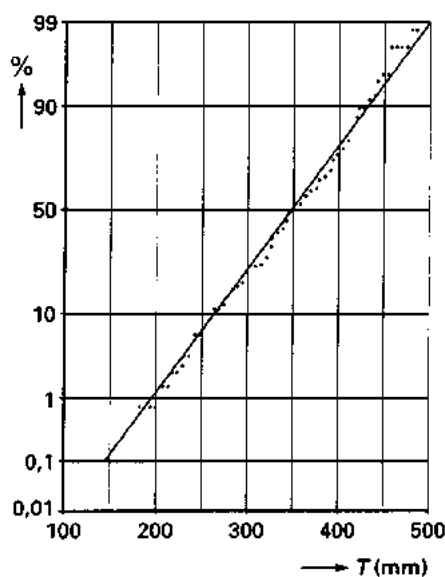
Hiermee waren zowel de lente als de zomer uitzonderlijk droog.

6p 11 □ Laat zien dat de droogte in de zomer van 1976 uitzonderlijker was dan die in de lente.

De totale hoeveelheid neerslag van lente en zomer samen noemen we T . Voor elk jaar is de waarde van T berekend. Op grond van de berekende waarden van T is een grafiek op normaal-waarschijnlijkheidspapier gemaakt. Zie figuur 3. Deze figuur staat ook op de bijlage. Merk op dat in deze figuur de waarde van T bij slechts enkele percentages nauwkeurig is af te lezen.

figuur 3

Nederland
cumulatieve frequentieverdeling van
de neerslag in procenten
lente en zomer



Eindexamen wiskunde A vwo 1997-II

Om te controleren of deze figuur goed is getekend, kun je het volgende doen:

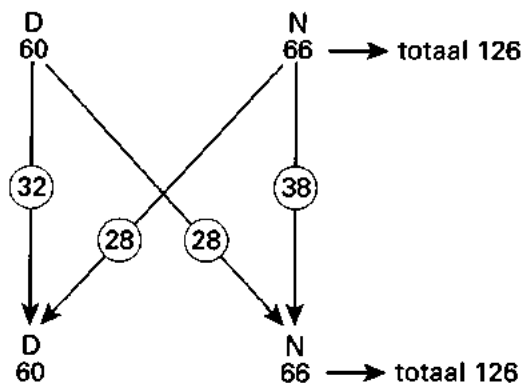
- leid af wat volgens de figuur op de bijlage het gemiddelde en de standaarddeviatie van T zijn;
- bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie van T met de gegevens van tabel 1;
- vergelijk de resultaten met elkaar.

7p **12** Voer deze controle uit.

Er is ook onderzocht of er een verband bestaat tussen de hoeveelheid neerslag in opeenvolgende jaren.

Volgens een bepaald criterium heeft men voor elk jaar uit de reeks van 127 jaren vanaf 1849 tot en met 1975 bepaald of dit een 'droog' jaar (D) was of een 'nat' jaar (N). Vervolgens heeft men geteld hoe vaak elke mogelijke overgang tussen twee opeenvolgende jaren voorkwam. De resultaten van het tellen kunnen in een schema worden weergegeven. Zie figuur 4. Merk op dat de reeks van 127 jaren 126 overgangen telt.

figuur 4



Neem aan dat de jaren 1976 en 1977 beide 'droog' waren. Op de bijlage is een begin gemaakt met het schema voor de 128 overgangen in de reeks vanaf 1849 tot en met 1977. Uitgaande van bovenstaande gegevens kun je dit schema op twee manieren verder invullen.

4p **13** Geef deze twee manieren aan op de bijlage. Licht je antwoord toe.

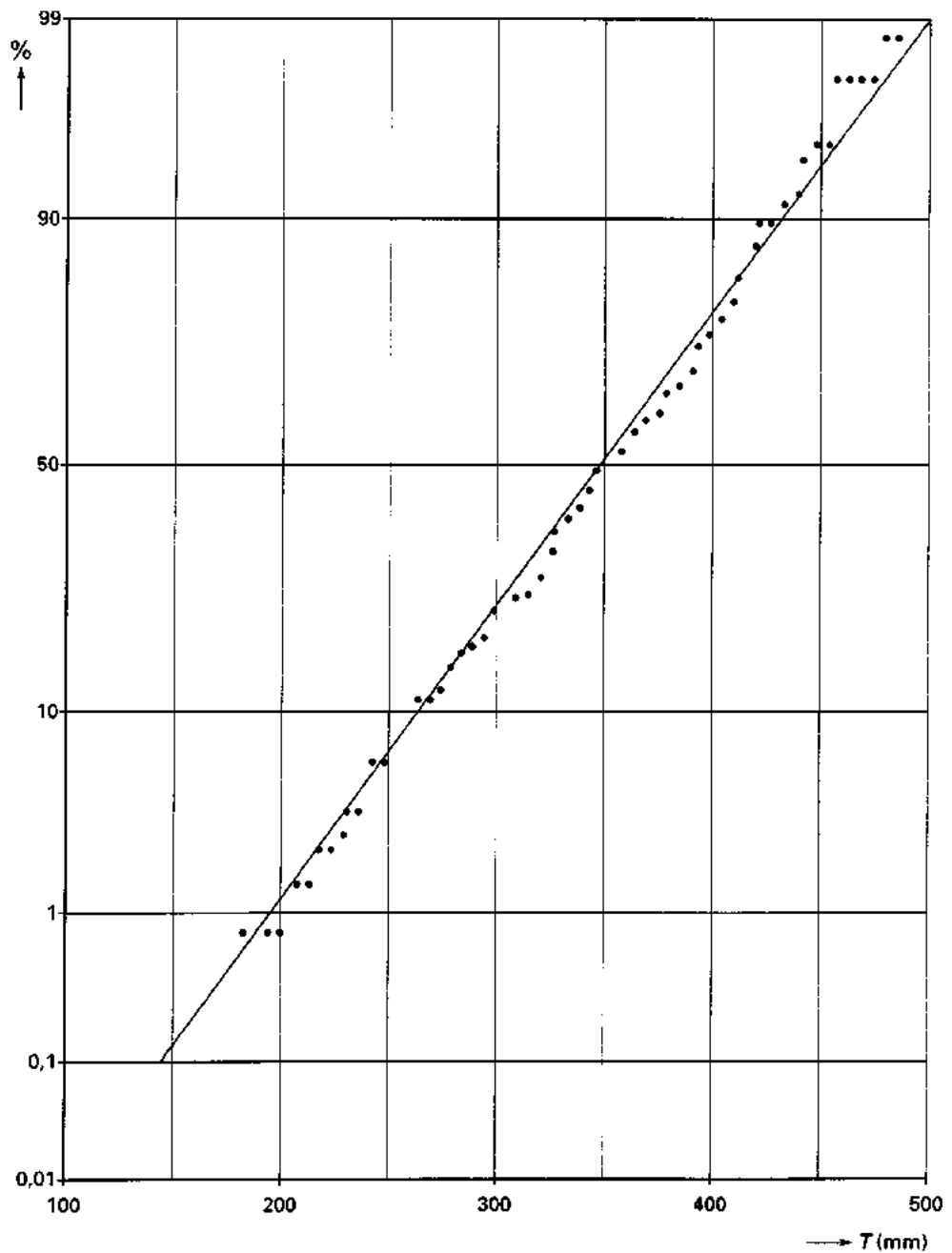
Neem nu aan dat het jaar 1849 'droog' was.

3p **14** Onderzoek of het jaar 1975 'droog' of 'nat' was.

Bijlage bij vraag 12

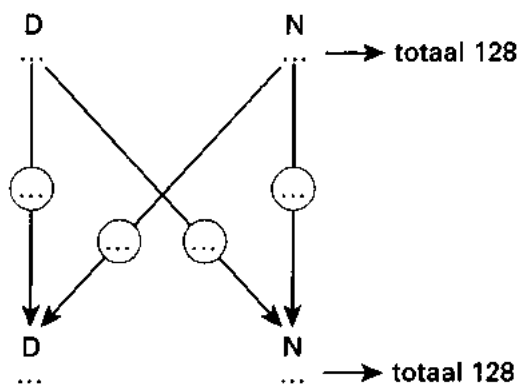
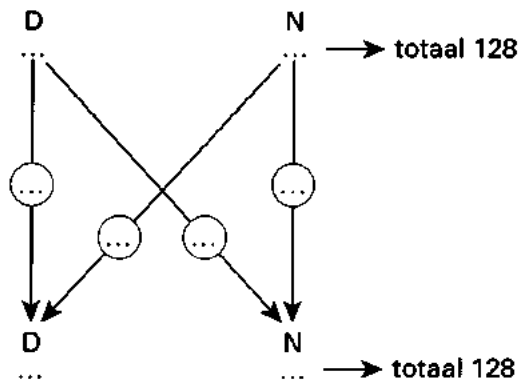
Vraag 12

Nederland
cumulatieve frequentieverdeling van de neerslag in procenten
lente en zomer



Bijlage bij vraag 13

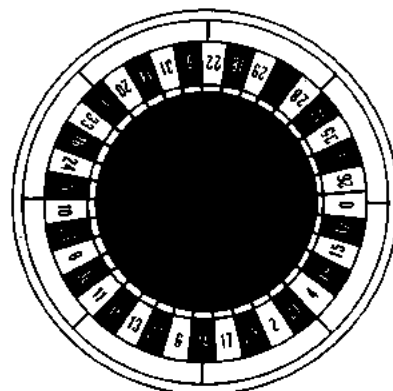
Vraag 13



■ Opgave 4 Casino

Bij roulette wordt bij ieder spel een schijf met vakjes, die genummerd zijn van 0 tot en met 36, aan het draaien gebracht. Zie figuur 5.

figuur 5



De croupier werpt daarna een balletje tegen de draairichting van de schijf in. Na enige tijd blijft het balletje in één van de 37 vakjes liggen. Het nummer van dat vakje is dan het winnende nummer.

Neem aan dat bij elk spel alle nummers gelijke kansen hebben om het winnende nummer te worden.

- Men speelt een serie van 50 spelen.
- 5p 15 Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat '10' in ten hoogste één van deze 50 spelen het winnende nummer zal zijn.

Om te onderzoeken of een ervaren croupier de uitslag kan beïnvloeden heeft men zo'n croupier gevraagd bij 50 achtereenvolgende spelen op de vakjes in de buurt van '10' te mikken. Men zal letten op de afstand (D) van het winnende nummer tot het vakje '10'. Uit figuur 5 blijkt dat voor '5' en '23' geldt $D = 1$, voor '8' en '24' geldt $D = 2$, enzovoort.

- 5p 16 Bereken de verwachtingswaarde van D als alle nummers gelijke kansen hebben.

De croupier houdt zich aan haar opdracht; in tabel 2 staan de resultaten van de 50 spelen.

afstand (D)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
frequentie	3	4	7	4	6	7	5	6	3	2	0	1	2	0	0	0	0	0	0

- 2p 17 Bereken de gemiddelde waarde van D bij deze 50 spelen.

Onder de indruk van deze uitslag heeft men de croupier gevraagd, aan een tweede experiment met zeshonderd spelen mee te werken. Hierbij kiest men bij elk spel voordat de schijf aan het draaien wordt gebracht, willekeurig één van de nummers en vraagt de croupier op het gekozen nummer te mikken. Bij 22 spelen van deze 600 spelen is het winnende nummer precies het gekozen nummer.

- 7p 18 Onderzoek of bij een significantieniveau van 5% hieruit de conclusie getrokken mag worden dat het gekozen nummer een verhoogde kans heeft om te winnen.

Om later fraude aan een roulettetafel te kunnen bewijzen, is het in het casino gebruikelijk om video-opnamen te maken. De videobanden worden geruime tijd in het archief bewaard. Daarbij wordt steeds de datum en de begintijd van de opname op het etiket van de band vermeld.

Eindexamen wiskunde A vwo 1997-II

Voor het verband tussen tijd en tellerstand geldt voor de gebruikte videobanden de volgende formule:

$$n = 250\sqrt{16t + 225} - 3750$$

Hierbij is n de tellerstand en t het aantal minuten afspeeltijd, gerekend vanaf het begin van de band.

De totale afspeeltijd van zo'n videoband is 91 minuten.

- 2p 19 Bereken de tellerstand aan het einde van zo'n band.

$\frac{dn}{dt}$ is de snelheid waarmee de tellerstand bij het afspelen van zo'n band verandert.

- 6p 20 Toon aan dat $\frac{dn}{dt}$ na 30 minuten afspeeltijd ongeveer anderhalf keer zo groot is als na 90 minuten afspeeltijd.