

## Opgave 1 Muziek

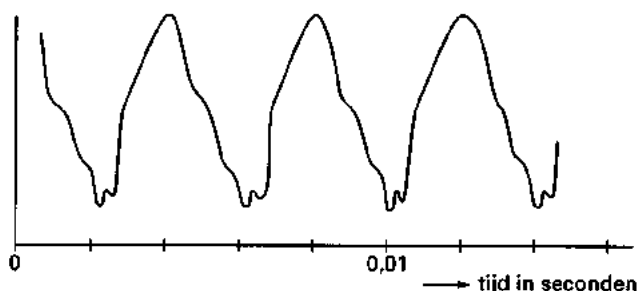
Door het blazen op een fluit, het tokkelen op een gitaar of het strijken op een viool worden luchtdeeltjes in trilling gebracht. Deze trillingen worden door onze oren opgevangen zodat wij geluid of muziek horen.

De *frequentie* van een trilling is het aantal perioden per seconde. De frequentie bepaalt de toonhoogte die wij horen.

De trillingen kunnen zichtbaar gemaakt worden. In figuur 1 zie je van een toon (gespeeld op een klarinet) de weergave.

figuur 1

Klarinettoon

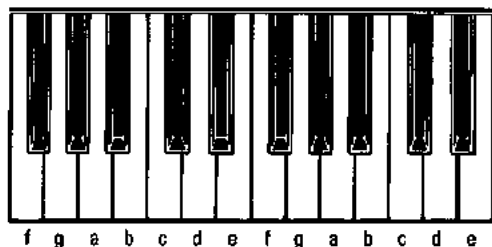


In figuur 1 zijn ruim 3 perioden afgebeeld.

3p 1 □ Hoe groot is de frequentie van deze toon? Licht je antwoord toe.

In figuur 2 zie je een stukje van het toetsenbord van een piano.

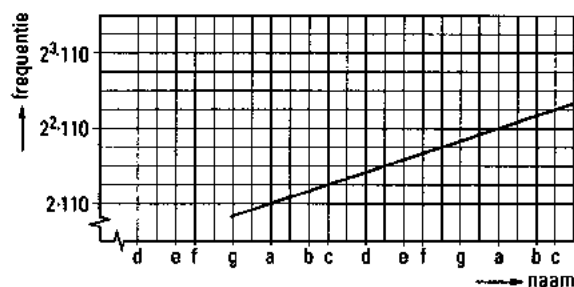
figuur 2



Bij elke toets hoort een bepaalde toon. Hoe verder naar rechts, hoe groter de frequentie van de toon. In de muziekpraktijk worden tonen meestal niet door hun frequentie aangeduid. Voor de tonen die bij de witte toetsen van de piano horen, gebruikt men de letters a tot en met g, zoals aangegeven in figuur 2. De namen van de tonen die bij de zwarte toetsen horen, zijn weggelaten. Zoals je ziet, is de naamgeving periodiek evenals de ordening van de witte en zwarte toetsen.

In de grafiek van figuur 3 kun je bij de namen van de witte toetsen de bijbehorende frequenties aflezen. Figuur 3 is ook afgebeeld op de bijlage.

figuur 3



# Eindexamen wiskunde A vwo 1997-I

Merk op dat door verdubbeling of halvering van de frequentie de naam niet verandert. Zo worden de tonen met frequentie ..., 110, 220, 440, 880, ... alle met de letter a aangegeven.

Mensen kunnen alleen tonen horen waarvan de frequentie ligt tussen 20 en 20 000 perioden per seconde.

- 3p 2  Hoeveel verschillende voor mensen hoorbare tonen zijn er die met de letter a worden aangegeven? Licht je antwoord toe.
- 3p 3  Bereken met behulp van de figuur op de bijlage de frequentie van één van de tonen die met de letter c worden aangegeven.

De meeste mensen zijn niet in staat om met als enig hulpmiddel hun oren de frequentie van een toon te bepalen. Veel eenvoudiger blijkt het te zijn om van twee na elkaar klinkende tonen de *verhouding* van de bijbehorende frequenties te herkennen. Zingt men bijvoorbeeld de eerste twee lettergrepen van het Nederlandse volkslied, dan heeft men twee tonen gezongen waarvan de frequenties zich verhouden als 3 : 4.

Frequentieverhoudingen die veel voorkomen hebben een naam gekregen. In tabel 1 staan enkele verhoudingen met hun naam. Je kunt er bijvoorbeeld uit afleiden dat twee tonen met frequenties 900 en 1800 samen een octaaf vormen.

tabel 1

frequentieverhouding	naam
1 : 2	octaaf
2 : 3	kwint
3 : 4	kwart
4 : 5	grote tert
5 : 6	kleine tert

We bekijken nu vier tonen met de frequenties  $f_1, f_2, f_3$  en  $f_4$  zodanig dat  $f_1 < f_2 < f_3 < f_4$ . De tonen met frequenties  $f_1$  en  $f_2$  vormen een grote tert, de tonen met frequenties  $f_2$  en  $f_3$  vormen een grote tert en ook de tonen met frequenties  $f_3$  en  $f_4$  vormen een grote tert. Musici zeggen in zo'n geval meestal dat de tonen met frequenties  $f_1$  en  $f_4$  een octaaf vormen.

- 4p 4  Toon aan dat volgens de tabel de tonen met frequenties  $f_1$  en  $f_4$  niet precies een octaaf vormen.

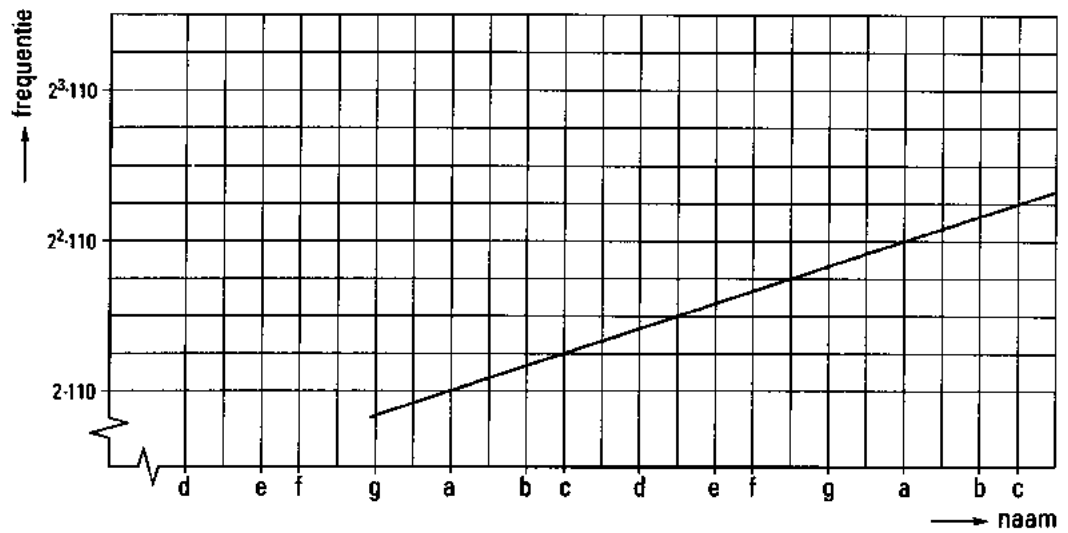
In discotheken draait men vaak *ambient* muziek in de ruimten waar de dansers bijkomen van hun inspanningen. In deze muziek kun je regelmatig lange reeksen tonen horen die slechts weinig variëren. Men gaat er van uit dat dit rustgevend werkt. Om deze reeksen te maken kan men gebruik maken van het toeval. Men spreekt dan van *toevalsmuziek*.

Een componist maakt een stukje toevalsmuziek. Hij kiest een willekeurige witte toets van de piano. Vervolgens kiest hij aselekt een van de getallen -2, -1, 0, +1, +2 en gaat zoveel witte toetsen naar links (-) of rechts (+) voor de tweede toon. Bijvoorbeeld als de eerste toon een c is, wordt bij -1 de tweede toon een b, bij 0 wordt het opnieuw een c. Voor de volgende tonen herhaalt hij deze procedure, telkens uitgaande van de laatstgekozen toon.

- 7p 5  Neem aan dat de eerste toon de middelste c van de piano is. De reeks zou dan kunnen zijn c, e, e, g, f, g, f, f, ... In dit voorbeeld is de vierde toon een g.
- Bereken de kans dat in een reeks die begint met de middelste c van de piano de vierde toon een c is.

## Bijlage bij vraag 3

### Vraag 3



## Opgave 2 Zien

### Bijziendheid en intelligentie

In een Nederlandse krant stond het volgende artikel:

artikel

#### BIJZIENDHEID KAN TEKEN VAN HOGE INTELLIGENTIE ZIJN

Onderzoekers van de Universiteit van Tel Aviv hebben ontdekt wat menig brildrager in zijn hart al wist: er is een verband tussen bijziendheid en een hoog intelligentiequotiënt (IQ), al is de aard van het verband nog niet geheel duidelijk. De artsen Rosner en Belkin, beiden verbonden aan de Universiteit van Tel Aviv, onderzochten 15 000 aselect gekozen personen. In het laatste nummer van de *American Medical Association's Archives of Ophthalmology* concluderen ze 'dat er geen twijfel over kan bestaan dat er verband bestaat tussen bijziendheid en intellectuele prestaties'. Van alle onderzochte personen was 16% bijziend, maar van de 612 onderzochten met een IQ van 128 of meer was 27,3% bijziend, terwijl van de 1578 onderzochten met een IQ van 80 of minder slechts 8% bijziend was. Rosner en Belkin wisten niet goed hoe ze die samenhang moesten verklaren. 'Intelligente mensen lezen misschien meer dan dommere mensen en excessief lezen kan de ogen vermoeien en tot bijziendheid leiden', opperen ze.

- 4p 6  Iemand die bijziend is, hoeft niet een hoog intelligentiequotiënt (IQ) te hebben.  
Bereken hoeveel procent van de bijzienden uit de onderzochte groep een IQ van 128 of meer had.

Het IQ van een persoon is een maat voor diens intelligentie. Het IQ wordt gegeven door een geheel getal.

Neem aan dat het IQ bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 100 en een standaarddeviatie van 16.

In de onderzochte groep van 15 000 personen vond men 612 personen met een IQ van 128 of meer. Dit aantal van 612 verschilt van het aantal dat men op grond van de aanname van de normale verdeling hierboven mag verwachten.

- 5p 7  Bereken hoe groot dit verschil is.

In het artikel staat dat 16% van alle onderzochte personen bijziend was. Uitgaande van dit onderzoeksresultaat formuleerde men de hypothese dat ook van de mensen met een hoog IQ (128 of meer), 16% bijziend was. Van de groep van 612 onderzochte personen met een hoog IQ bleek 27,3% bijziend.

- 7p 8  Onderzoek of de 27,3% bij een significantieniveau van 1% overtuigend lag boven de 16% die men van te voren aannam.

### Brillen en kapjes

In een attractiepark is een bioscoop met 100 zitplaatsen, waar men uitsluitend 'driedimensionale' natuurfilms draait. Om zo'n film goed te kunnen volgen, moet men een speciaal soort brilletje opzetten. Bril dragers moeten in plaats daarvan een, nogal duur, kapje voor hun bril zetten. Het management van het attractiepark wil weten hoeveel kapjes voor bril dragers aangeschaft moeten worden. Men stelt de volgende voorwaarde: per voorstelling moet de kans dat men een bril dragende bezoeker moet teleurstellen met de mededeling dat er geen kapje meer beschikbaar is, kleiner zijn dan 5%. Men gaat er hierbij van uit, dat 20% van de bezoekers van het attractiepark een bril draagt.

- 5p 9  Bereken het minimale aantal kapjes dat moet worden aangeschaft.

## ■ Opgave 3 Via Mare

De kleine rederij *Via Mare* is gevestigd in het havenplaatsje Porto Marino. In verband met een jeugdkamp krijgt *Via Mare* de opdracht om binnen één dag 258 personen en 12 000 kg vracht over te brengen naar het voor de kust gelegen eilandje Solatio.

*Via Mare* beschikt over twee schepjes: de *Aringa* die ruimte heeft voor 16 passagiers en 400 kg vracht, en de *Balena* die ruimte heeft voor 6 passagiers en 2 000 kg vracht.

De *Aringa* kan in een dag ten hoogste 20 keer heen en weer varen naar Solatio, de *Balena* ten hoogste 15 keer.

Een keer heen en weer varen met *Aringa* kost de rederij 1 000 000 lire, en met de *Balena* 400 000 lire.

*Via Mare* streeft er naar elke opdracht uit te voeren met zo laag mogelijke kosten.

Stel dat men de *Aringa*  $x$  keer heen en weer laat varen, en de *Balena*  $y$  keer.

- 2p 10 □ Welke voorwaarden gelden voor  $x$  afzonderlijk en welke voorwaarden gelden voor  $y$  afzonderlijk?

De informatie over de passagiers-capaciteit en de vracht-capaciteit van de twee schepjes leidt tot twee beperkende voorwaarden.

- 4p 11 □ Toon aan dat deze twee beperkende voorwaarden kunnen worden beschreven door  $8x + 3y \geq 129$  en  $x + 5y \geq 30$ .
- 5p 12 □ Teken nauwkeurig op millimeterpapier het toegestane gebied. Neem als eenheid 1 cm.
- 6p 13 □ Toon aan dat, als de opdracht met zo laag mogelijke kosten wordt uitgevoerd, telkens de passagiers-capaciteit en de vracht-capaciteit volledig benut worden.

De plannen zijn net gemaakt als er bericht komt dat er niet 258 maar slechts 240 personen vervoerd moeten worden. De hoeveelheid vracht blijft 12 000 kg. Men vraagt zich af hoe de opdracht nu met zo laag mogelijke kosten kan worden uitgevoerd.

- 8p 14 □ Geef antwoord op deze vraag.  
Vermeld in je antwoord de kosten en geef aan of de passagiers-capaciteit en de vracht-capaciteit volledig benut worden. Geef ook je gemaakte berekeningen.

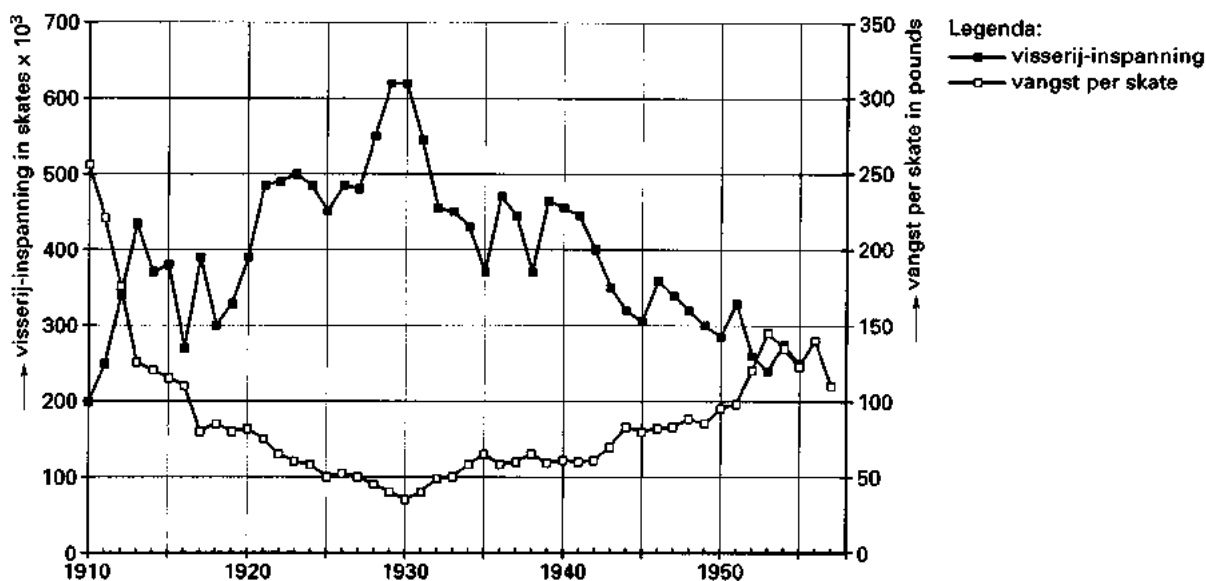
## Opgave 4 Vis

### Heilbot

In de periode 1910-1930 werd er steeds meer materieel ingezet bij de heilbot-visserij. Toch werd er steeds minder heilbot gevangen. Dit duidde op overbevissing: er werd zoveel gevangen dat de hoeveelheid heilbot die in zee aanwezig was steeds verder afnam. In 1930 nam men dan ook maatregelen om overbevissing op deze vissoort tegen te gaan. Een en ander is weergegeven in figuur 4.

figuur 4

Vangst van heilbot



In figuur 4 zijn uitgezet:

- de visserij-inspanning op heilbot, uitgedrukt in *skates*; de skate is een maat voor het aantal haken waarmee gevestig wordt.
- de vangst per skate; dit is het aantal pounds dat gemiddeld per skate wordt gevangen.

In de periode 1930-1955 nam het aantal skates waarmee men viste onder druk van de overheid nogal af: van  $620 \times 10^3$  skates naar  $250 \times 10^3$  skates. De totale vangst nam behoorlijk toe, waarschijnlijk doordat de jonge vis meer tijd kreeg om zich te ontwikkelen.

- 5p 15 □ Bereken met behulp van figuur 4 hoeveel procent de totale vangst in 1955 meer is dan de totale vangst in 1930.

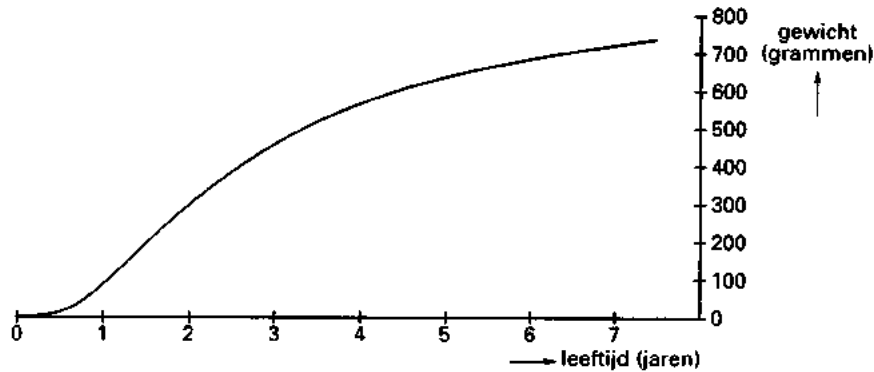
### Visserijbiologie

In de visserijbiologie worden onder andere groeimodellen ontwikkeld die het verband aangeven tussen leeftijd en gewicht van een exemplaar van een bepaald soort vis. Vanaf 1950 wordt de kennis uit deze tak van wetenschap gebruikt om de visstand beter te kunnen regelen.

Als voorbeeld van een groeimodel is in figuur 5 de grafiek getekend die het verband aangeeft tussen leeftijd en gewicht van een haring.

figuur 5

Groei van een haring



Neem aan dat deze kromme door de punten (2, 300) en (7, 720) gaat en dat de kromme vanaf  $t = 1$  beschreven kan worden door een formule van de vorm:

$$H(t) = 800 - a \cdot b^t \quad (H \text{ in grammen, } t \text{ in jaren}).$$

6p 16  Bereken  $a$  en  $b$ .

Ook bij het kweken van vis wordt gebruik gemaakt van modellen uit de visserijbiologie.

In een grote visvijver worden 11 000 eenjarige forellen uitgezet. Het aantal forellen neemt *per dag* af met 0,03%.

Hieruit is af te leiden dat het aantal in leven zijnde exemplaren kan worden beschreven door de formule:

$$N(t) = 11\,000 \cdot e^{-0,11t} \quad (t \text{ in jaren vanaf het moment van uitzetten}).$$

4p 17  Geef deze afleiding.

Het verband tussen de leeftijd en het gewicht (in kilogrammen) van een exemplaar van deze forelsoort wordt beschreven door de formule:

$$F(t) = 0,600 - 0,535 \cdot e^{-0,37t} \quad (t \text{ in jaren vanaf het moment van uitzetten}).$$

Het gewicht (in kilogrammen) van alle forellen samen kan nu beschreven worden door de formule:

$$G(t) = 6600 \cdot e^{-0,11t} - 5885 \cdot e^{-0,48t}.$$

3p 18  Laat dit zien.

De eigenaar wil de vijver helemaal leegvissen op het moment dat het gewicht van alle forellen samen maximaal is.

6p 19  Bereken hoeveel maanden na het uitzetten de visvijver leeggevisst moet worden.