

Opgave 1 Sterfte van zeebaarzen

Zeebaarzen worden veelvuldig aangetroffen in Amerikaanse rivieren en meren. In kleine meren is er 's zomers soms sprake van een massale sterfte onder deze vissen. De bioloog Coutant is op zoek gegaan naar mogelijke oorzaken.

foto



Coutant slaagde er in een aantal zeebaarzen met een zendertje uit te rusten. Via dit zendertje kon hij op elk moment de temperatuur waarnemen van het water waarin zo'n vis zwom. Uit zijn verslag komt tabel 1. Hierin staan de temperaturen van het water waarin één van die zeebaarzen zwom. De waarnemingen deed hij met vaste tussenpozen. De temperatuur is afgerond op gehele graden Celsius. Uit tabel 1 blijkt bijvoorbeeld dat het water bij 99 van de 7068 waarnemingen een temperatuur had van 14,5 °C tot 15,5 °C.

tabel 1

Watertemperatuur in °C bij 7068 waarnemingen

watertemperatuur	aantal waarnemingen
15	99
16	325
17	566
18	636
19	1201
20	1555
21	990
22	918
23	495
24	241
25	42
	— +
totaal	7068

- 3 p 1 Bereken bij hoeveel procent van de waarnemingen de watertemperatuur ten minste 22,5 °C was.

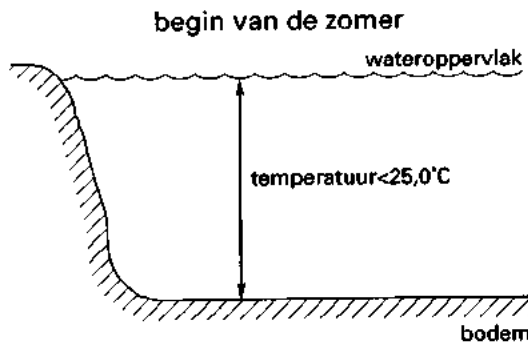
Een collega van Coutant beweerde dat de waargenomen watertemperaturen normaal verdeeld zijn met een gemiddelde van 19,9 °C en een standaarddeviatie van 2,1 °C. Het aantal van 636 waarnemingen dat tabel 1 vermeldt bij 18 °C, wijkt echter nogal af van het aantal dat volgens deze normale verdeling verwacht had mogen worden.

- 7 p 2 Bereken hoe groot deze afwijking is.

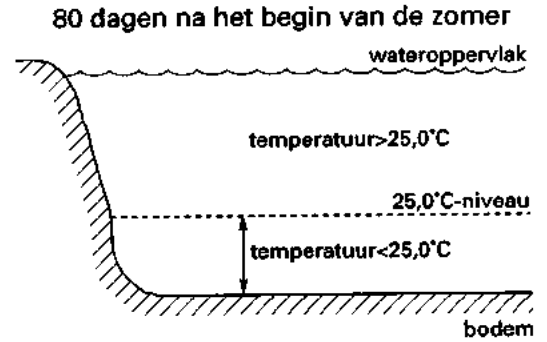
Uit andere experimenten van Coutant bleek dat zeebaarzen een langdurig verblijf in water met een temperatuur van meer dan 25,0 °C niet kunnen overleven.

In een klein meer, Lake Cherokee genaamd, werd het water gedurende de zomer zo door de zon verwarmd dat het 25,0°-niveau steeds dieper kwam te liggen. Bij het begin van de zomer lag dit niveau net aan het wateroppervlak (figuur 1a). 80 dagen later had de bovenste 65% van het water een temperatuur van meer dan 25,0 °C (figuur 1b).

figuur 1a



figuur 1b

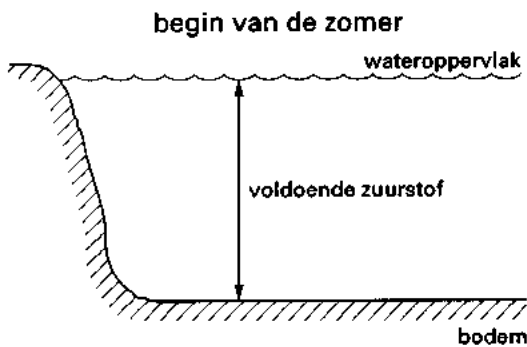


Coutant ontdekte bovendien dat zeebaarzen alleen kunnen leven in water dat ten minste 2 mg zuurstof per liter water bevat.

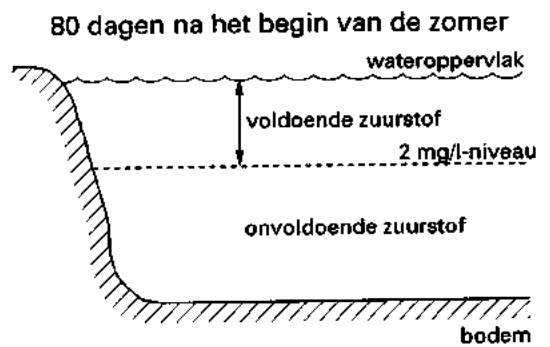
Door rotting van gezonken organismen ontwikkelde zich in Lake Cherokee gedurende de zomer vanaf de bodem een steeds dikker wordende laag water met te weinig zuurstof.

Bij het begin van de zomer bevatte het water op de bodem nog juist 2 mg zuurstof per liter (figuur 2a). 80 dagen later was er echter te weinig zuurstof in de onderste 60% van het water (figuur 2b).

figuur 2a



figuur 2b

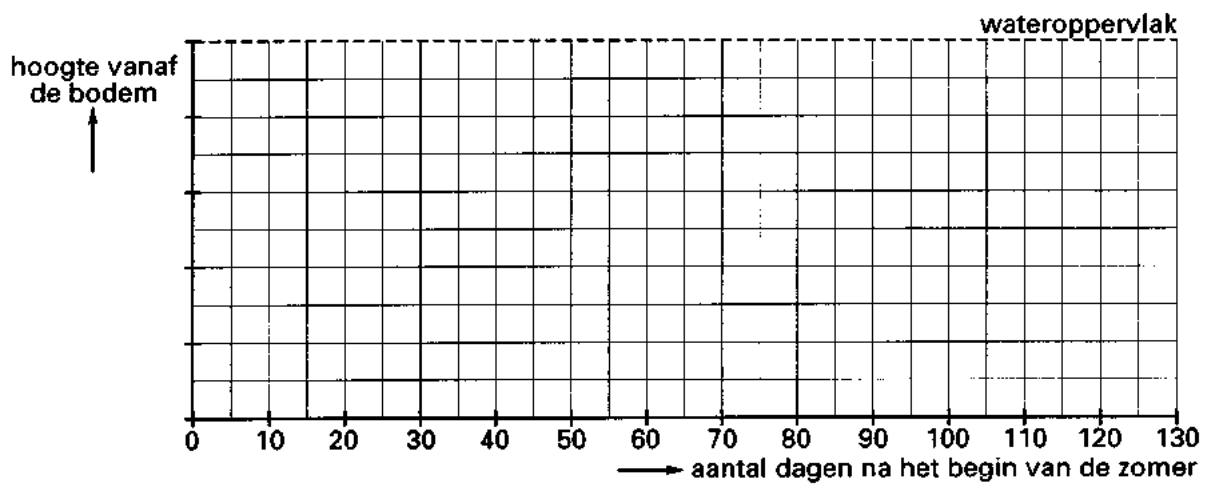


Neem aan dat beide verschijnselen lineair in de tijd verlopen.

- 6 p 3 Zet in de figuur op de bijlage het 25,0°-niveau en het 2 mg/l-niveau tegen de tijd uit.
- 6 p 4 Bereken na hoeveel dagen, gerekend vanaf het begin van de zomer, zeebaarzen niet meer in Lake Cherokee konden leven.

Bijlage bij vraag 3

Vraag 3



■ Opgave 2 Geluidshinder van verkeer

Langs drukke snelwegen

Het lawaai dat men ondervindt van het verkeer op een drukke snelweg blijkt vooral af te hangen van de afstand die men heeft tot de snelweg en van de snelheid van het verkeer op de snelweg.

Het lawaai is niet constant. Ook als een waarnemer op een vaste plek staat, wisselt het lawaai in de tijd voortdurend. Voor het vergelijken van situaties hanteert men daarom het gemiddelde lawaainiveau (L) voor een plek. Een hoge waarde van L kan reden zijn om een geluidswal te plaatsen bij een woonwijk. Bij drukke snelwegen gaat men uit van de formule:

$$L = 89,5 - 4,3 \ln(a \cdot v) + 0,16v - 0,03a$$

met a de afstand in meters tot de snelweg
en v de gemiddelde snelheid in km/uur van het verkeer op de snelweg.

Stel dat $v = 80$.

- 4 p 5 □ Toon aan dat volgens deze formule L afneemt als de afstand tot de snelweg groter wordt.

Bewoners van woningen dicht bij de snelweg ondervinden vooral veel overlast bij hoge en zeer lage gemiddelde snelheden van het verkeer.

Een woning staat op 100 meter afstand van de snelweg.

- 5 p 6 □ Toon met behulp van differentiëren aan dat er een gemiddelde snelheid van het verkeer is waarbij L minimaal is bij deze woning en bereken die gemiddelde snelheid.
- 2 p 7 □ Onderzoek in hoeverre de afstand die een woning heeft tot de snelweg van invloed is op de gemiddelde snelheid waarbij L minimaal is.

In steden

Op drukke plekken in een stad is de verkeerssituatie vaak erg ingewikkeld. Een formule als hierboven kan dan niet gebruikt worden. Bovendien zijn in een stad de pieken in het lawaai meestal van meer belang dan het gemiddelde lawaainiveau.

Voor het vergelijken van situaties gaat men vaak als volgt te werk.

- Per plek meet men het lawaainiveau continu gedurende een vaste meetperiode, bijvoorbeeld van 04.00 uur tot 24.00 uur.
- Uit de meetresultaten bepaalt men daarna het lawaainiveau dat gedurende 10% van die meetperiode werd overschreden. Dit niveau wordt aangeduid met L_{10} .
Vindt men voor L_{10} op een plek bijvoorbeeld de waarde 105, dan was het lawaainiveau daar gedurende 10% van de meetperiode hoger dan 105 en gedurende 90% van de meetperiode 105 of lager.

Op een werkdag is van 04.00 uur tot 24.00 uur het lawaainiveau continu gemeten op een bepaalde plek. Voor die meetperiode en die plek vond men $L_{10} = 105$. Alleen tijdens de ochtendspits (07.00 uur - 09.00 uur) en de avondspits (17.00 uur - 19.00 uur) werden daarbij waarden hoger dan 100 gemeten.

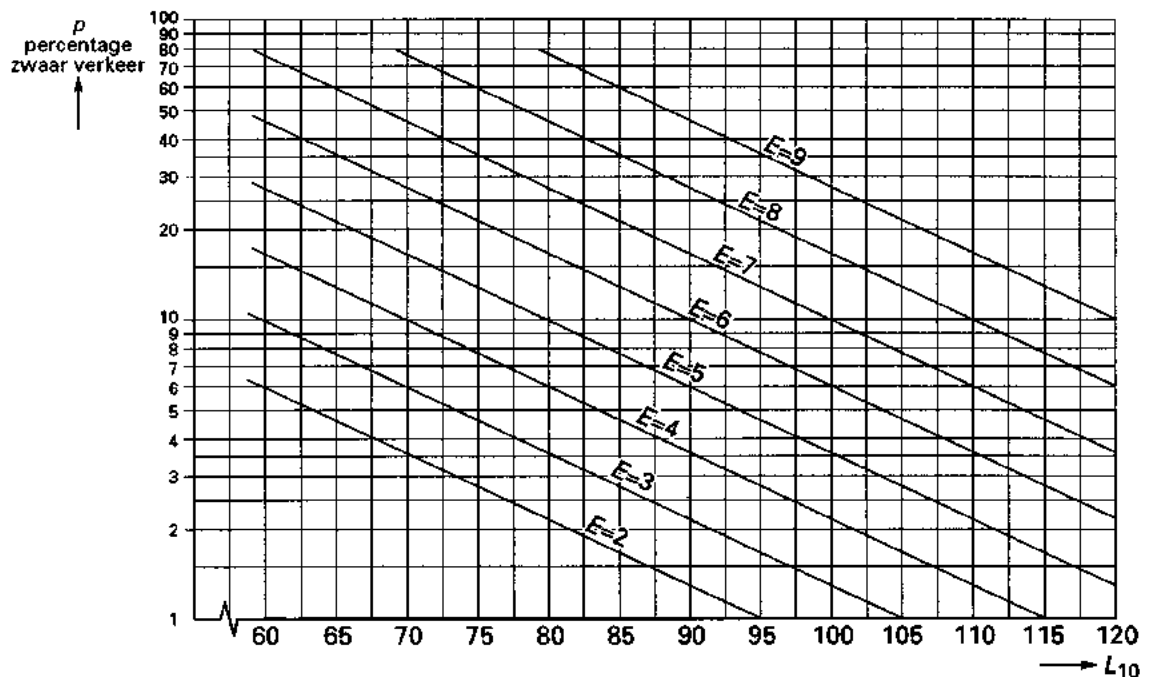
- 5 p 8 □ Geef in de figuur op de bijlage op grond van het bovenstaande in een grafiek weer welke waarden men bijvoorbeeld voor het lawaainiveau gemeten zou kunnen hebben. Geef een toelichting.

Eindexamen wiskunde A vwo 1995-I

In Londen hebben onderzoekers bovendien per plek aan een groot aantal omwonenden gevraagd in welke mate men zich ergert aan het verkeerslawaai. Op grond van de antwoorden bepaalden de onderzoekers een 'ergernis-score' (E) voor elke plek. Voor E gebruikten ze de getallen van 0 tot en met 10, waarbij $E = 0$ overeenkomt met 'in het geheel niet ergerlijk' en $E = 10$ met 'uitermate ergerlijk'.

Er bleek geen direct verband te bestaan tussen de ergernis-score en L_{10} . Een hogere waarde van L_{10} leverde niet altijd een hogere ergernis-score. De ondervraagden bleken zich namelijk met name te ergeren aan het lawaai dat vrachtauto's en bussen maken. Diepgaande analyse van de resultaten leidde tot het opstellen van een model waarin naast E en L_{10} ook het percentage zwaar verkeer (p) is opgenomen (zie figuur 3, deze figuur is ook op de bijlage afgebeeld).

figuur 3



Voordat een ringweg was aangelegd, leverden metingen voor een zeker knelpunt in Londen op: $L_{10} = 85$ en $p = 35$.

Na de openstelling van de ringweg is het op het knelpunt veel minder druk. Tegenwoordig is de ergernis-score voor het knelpunt nog maar de helft van die van vroeger. Het percentage zwaar verkeer op het knelpunt is tegenwoordig 15.

- 5p 9 Lees af hoe groot L_{10} op het knelpunt tegenwoordig ongeveer is. Licht je werkwijze toe, gebruik daarbij de figuur op de bijlage.

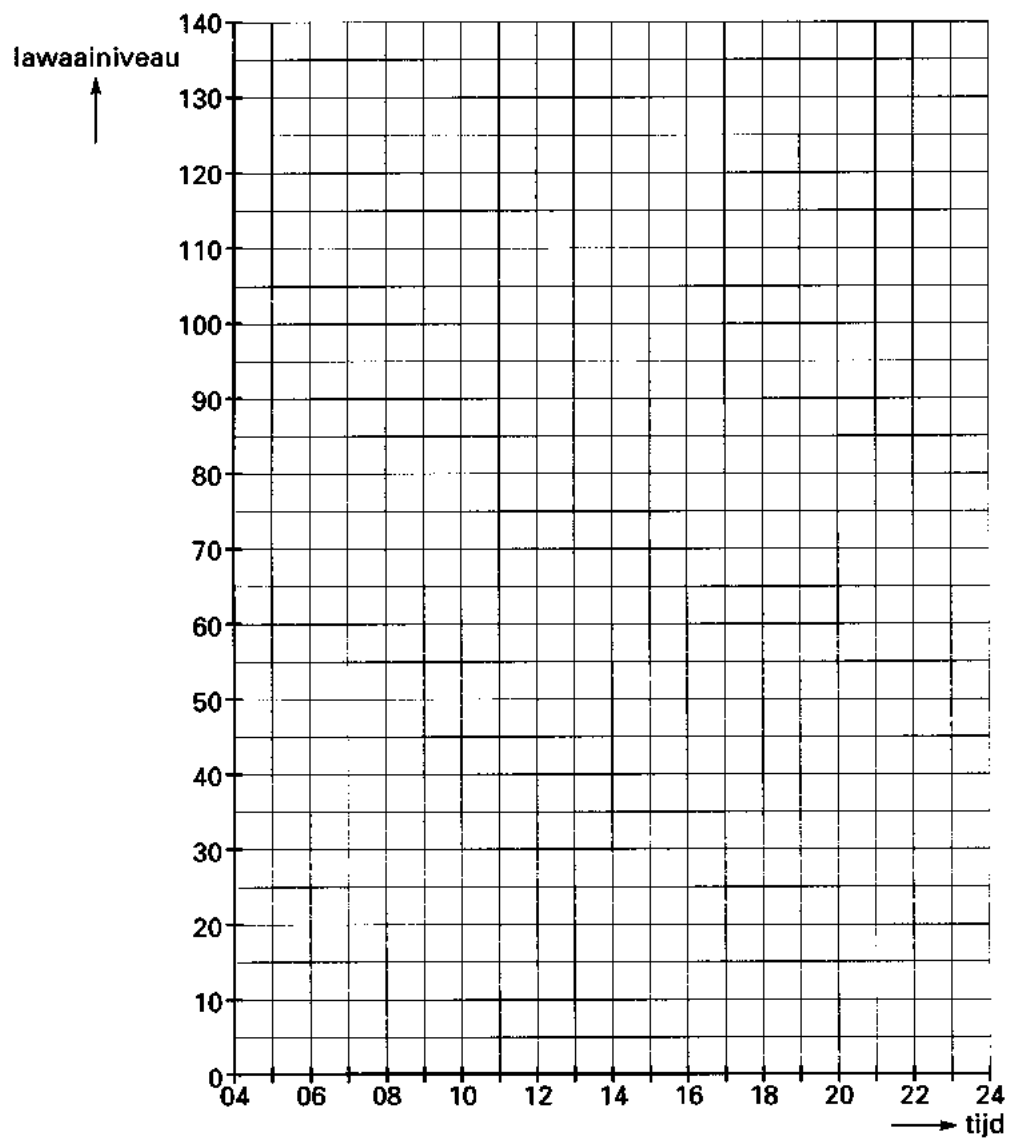
Op grond van figuur 3 kan voor E een formule worden opgesteld van de vorm:

$$E = 0,1 \cdot L_{10} + b \cdot \log p + c$$

- 5p 10 Bereken b en c .

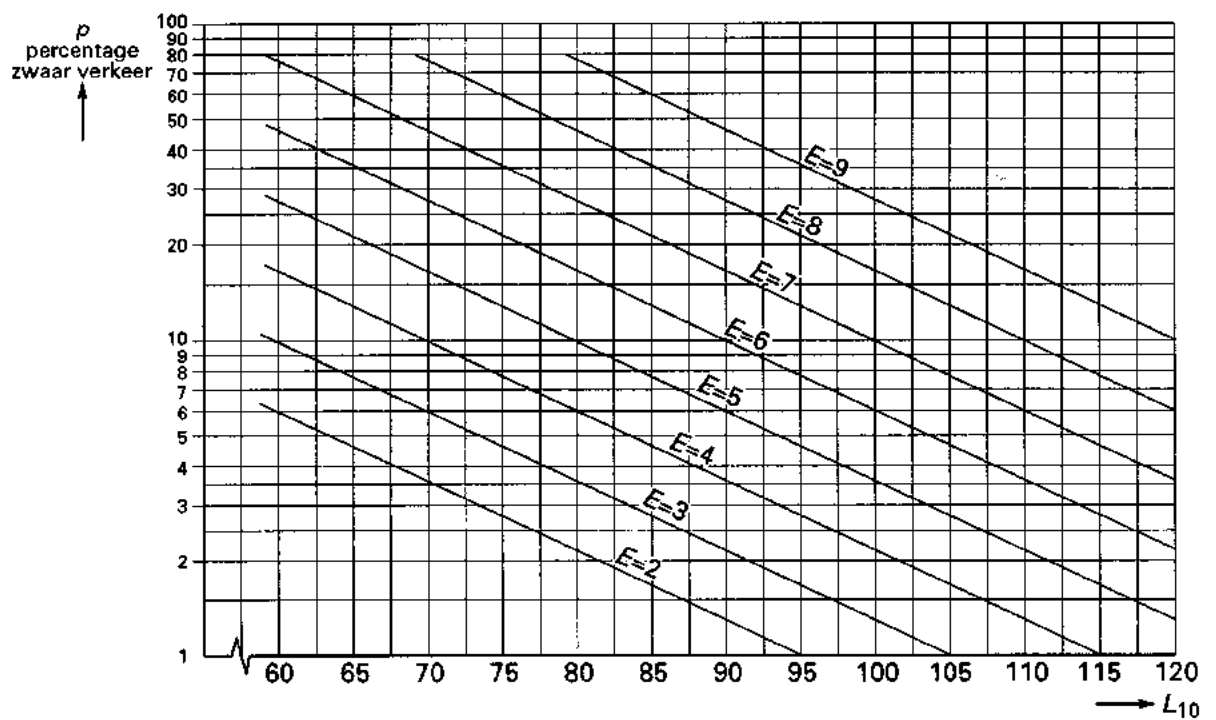
Bijlage bij vraag 8

Vraag 8



Bijlage bij vraag 9

Vraag 9



■ Opgave 3 Hulporganisatie *Help!*

De hulporganisatie *Help!* moet vanuit havenplaats Hilim haar hulpposten in de plaatsen Ayeh en Biopa bevoorraden. In Ayeh is wekelijks 120 ton rijst nodig, in Biopa is wekelijks 100 ton rijst nodig (1 ton = 1000 kg).

Voor het vervoer van de rijst kan *Help!* aanvankelijk slechts beschikken over vrachtauto's. Door diefstal en andere oorzaken gaat bij het transport per vrachtauto nogal wat rijst verloren. Slechts $\frac{4}{5}$ deel van de rijst die vanuit Hilim verstuurd wordt, bereikt de hulpposten.

De aanvoer- en verwerkingscapaciteit in Hilim is beperkt. Men kan vanuit deze plaats per week maximaal 260 ton naar Ayeh en Biopa versturen.

- 3 p 11 □ Laat met een berekening zien dat het niet mogelijk is zowel Ayeh als Biopa met vrachtauto's wekelijks van voldoende rijst te voorzien.

Help! krijgt de beschikking over een klein vliegtuig. Bij het transport per vliegtuig gaat geen rijst verloren. Daardoor is het nu wel mogelijk beide hulpposten van voldoende rijst te voorzien. Een nadeel is echter dat de transportkosten per ton veel hoger zijn (zie tabel 2).

tabel 2

Transportkosten per ton uit Hilim verzonden rijst

	naar Ayeh	naar Biopa	
per vrachtauto	\$ 40	\$ 60	
per vliegtuig	\$ 150	\$ 200	(\$ 40 = 40 dollar)

Omdat bij het vervoer per vrachtauto nogal wat rijst verloren gaat en bij het vervoer per vliegtuig niet, moet voor een vergelijking van de transportkosten ook rekening gehouden worden met de geldswaarde van de rijst. Elke in Hilim aangevoerde ton rijst kost \$ 300. Het afleveren van 1 ton rijst in Ayeh komt voor *Help!* daardoor uiteindelijk bij vervoer per vliegtuig slechts \$ 25 duurder uit dan bij vervoer per vrachtauto.

- 6 p 12 □ Toon dit aan.

Help! wil er voor zorgen dat per week precies 120 ton rijst in Ayeh en precies 100 ton rijst in Biopa aankomen.

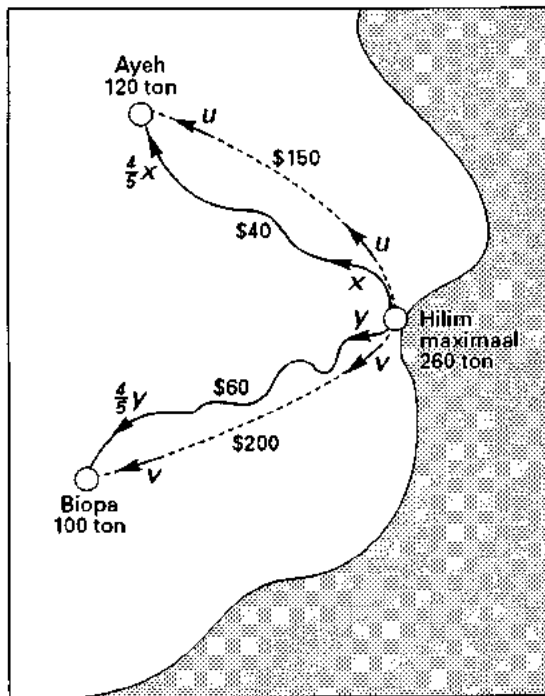
Men hanteert het transportschema van tabel 3. Zie ook figuur 4.

tabel 3

Transportschema, aantallen tonnen *vanuit* Hilim ($x, y, u, v \geq 0$)

	naar Ayeh	naar Biopa
per vrachtauto	x	y
per vliegtuig	u	v

figuur 4



Zowel tussen x en u als tussen y en v bestaat een direct verband. Met behulp hiervan kunnen de totale kosten in dollars per week (K) voor rijst en vervoer uitgedrukt worden in x en y .

- 6 p 13 Toon aan dat dit leidt tot $K = 104000 - 20x - 40y$.
 2 p 14 Waarom geldt: $x \leq 150$ en $y \leq 125$?

Help! wil het transport zo regelen dat de totale kosten zo laag mogelijk zijn. Daarbij moet ook rekening gehouden worden met de capaciteit van het vliegtuig. Hiermee kan wekelijks ten hoogste 80 ton rijst worden vervoerd.

- 8 p 15 Bereken bij welke waarden van x , y , u en v de totale kosten per week voor rijst en vervoer minimaal zijn.

■ Opgave 4 Aspirine

Enige jaren geleden is in de Verenigde Staten in een onderzoek nagegaan of het regelmatig innemen van aspirine de kans op een hartinfarct doet afnemen.

Men liet 22000 gezonde personen gedurende vijf jaar om de dag een pil slikken. De groep pillenslikkers was aselekt in twee even grote groepen verdeeld. De personen van de ene groep slikten pillen waarin aspirine zat. De personen van de andere groep, de controlegroep, slikten uiterlijk gelijke pillen zonder aspirine.

Uiteraard wist niemand van de 22000 pillenslikkers of hij/zij pillen met aspirine of pillen zonder aspirine slikte.

In de controlegroep kregen 189 van de 11000 personen een hartinfarct, dus ongeveer 1,72%. Op grond hiervan stelde men de kans op het krijgen van een hartinfarct *zonder* het regelmatig innemen van aspirine gelijk aan 0,0172.

- 7 p 16 □ Bereken hoeveel van de 11000 aspirinegebruikers een hartinfarct gekregen mogen hebben om bij een significantieniveau van 1% de conclusie te rechtvaardigen dat regelmatig aspirinegebruik de kans op een hartinfarct doet afnemen.

In feite kregen 104 aspirinegebruikers een hartinfarct.

De resultaten van het onderzoek stonden in het dagblad NRC Handelsblad. Het leidde tot een discussie in de brievenrubriek over de vraag of regelmatig aspirinegebruik de kans op een hartinfarct doet verminderen met 45% of met 0,8%.

- 4 p 17 □ Leg uit hoe deze percentages in verband staan met de resultaten van het onderzoek.

De 22000 pillenslikkers waren allemaal artsen. De drie artsen van groepspraktijk A en de vijf artsen van groepspraktijk B namen aan het experiment deel. Uiteraard had ieder van deze acht artsen evenveel kans tot de controlegroep te behoren als tot de groep van aspirinegebruikers.

- 7 p 18 □ Bereken de kans dat in precies één van de twee groepspraktijken de artsen best elkaars pillen hadden mogen slikken omdat die toch niet verschillend waren.